

Теоријске основе

У наставку је краћак преглед знања које је неопходно за решавање задатака који следе.

Циљ последњих вежби јесте да научимо да, на основу правила (израза) којим је нека функција дефинисана, скицирамо¹ њен график. Практично, сва знања већ имамо, и сада ћемо их само систематизовати. У наставку су кораци које предузимамо у вези са функцијом f како бисмо скицирали њен график.

1. *Домен.* У овој тачки одређујемо област дефинисаности функције f . То нам је важно због изгледа самог графика, а и због тога што ћемо вертикалне асимптоте тражити у рубним тачкама домена.
2. *Парносћ.* Функција f је парна уколико за сваку тачку x њеног домена важи да је $f(-x) = f(x)$, а непарна уколико важи $f(-x) = -f(x)$. Овде се имплицитно подразумева да ако x може бити аргумент функције f , онда може и $-x$, и обрнуто. Дакле, да би имало смисла питати се да ли је функција парна или непарна, њен домен мора бити симетричан око нуле. Чим имамо функцију чији домен то није, одмах изводимо закључак да она није ни парна ни непарна.

График парне функције је симетричан у односу на y -осу, а график непарне функције симетричан је у односу на координатни почетак. Уколико имамо посла с парном, или непарном, функцијом, тада су и нуле, и знак, и екстремуми итд. симетрични у односу на y -осу (или координатни почетак), што нам олакшава цртање графика и служи као добар индикатор потенцијалних грешака.

У окружењима у којима имамо посла са потенцијално периодичним функцијама (\sin , \cos итд), ова тачка се често назива *парносћ* и *периодичносћ*, па се онда испитује и периодичност и одређује период функције. Ми са таквим функцијама нећемо радити.

3. *Нуле и знак.* У оквиру ове тачке испитујемо за које вредности аргумента x је $f(x) = 0$, као и када је оно позитивно и када је негативно.
4. *Асимптоте.* Одређујемо вертикалне, хоризонталне и косе асимптоте функције, уколико их има. О овоме смо детаљно говорили у десетим вежбама.
5. *Мононосћ* и *локални екстремуми.* Овде испитујемо када функција расте, када опада и одређујемо њене локалне минимуме и максимуме.

Када год то функција дозвољава, то радимо рачунањем њеног првог извода и испитивањем његовог знака. О овоме смо учили у једанаестим вежбама.

6. *Конвексност* и *превојне тачке.* Одређујемо када је функција конвексна, а када конкавна. Када год је то могуће, то радимо испитујући знак другог извода. И о овоме смо учили у једанаестим вежбама.
7. *График.* На основу свих претходних тачака, „склапамо” график функције и скицирамо га.

Задаци који се раде на вежбама

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x - 5}{x - 3}$$

1. *Домен.* Јасно је да мора важити да је $x - 3 \neq 0$, па је $D_f = (-\infty, 3) \cup (3, \infty)$.
2. *Парносћ.* Пошто домен функције f није симетричан у односу на нулу, функција f није ни парна ни непарна.
3. *Нуле и знак.* За почетак, можемо записати да је

$$f(x) = \frac{(x + 5)(x - 1)}{x - 3}$$

Као што смо већ видели у једанаестим вежбама, знак претходног израза најлакше је испитати уз помоћ таблице:

	$-\infty$	-5	1	3	
$x + 5$		-	+	+	→
$x - 1$		-	-	+	→
$x - 3$		-	-	-	→
$f(x)$		-	+	-	→

Као што видимо, функција f је позитивна на интервалима $(-5, 1)$ и $(3, +\infty)$, а негативна на $(-\infty, -5)$ и $(1, 3)$. Функција има две нуле, јер је $f(-5) = f(1) = 0$.

4. *Асимптоте.*
 - *Вертикалне.* Тражимо их у рубним тачкама домена, тј. кандидат за вертикалну асимптоту је права $x = 3$. Имамо да је

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \frac{9 + 12 - 5}{0^-} = -\infty$$

¹Нацртамо отприлике.

и

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \frac{9 + 12 - 5}{0^+} = +\infty,$$

па права $x = 3$ заиста јесте вертикална асимптота функције f , и то с обе стране.

- *Хоризонталне.* Пошто је у изразу за $f(x)$ бројилац другог, а именилац првог степена, јасно је да је

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty,$$

па функција f нема хоризонталних асимптота.

- *Косе.* Имамо да је

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 3x} = 1$$

и

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 4x - 5}{x - 3} - x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 4x - 5 - x(x - 3)}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{7x - 5}{x - 3} = 7, \end{aligned}$$

па је права $y = x + 7$ коса асимптота функције f у обе бесконачности.

5. *Моноћоност и локални екстремуми.* Важи да је

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x + 4)(x - 3) - (x^2 + 4x - 5)}{(x - 3)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 6x + 4x - 12 - x^2 - 4x + 5}{(x - 3)^2} \\ &= \frac{x^2 - 6x - 7}{(x - 3)^2}, \end{aligned}$$

односно

$$f'(x) = \frac{(x + 1)(x - 7)}{(x - 3)^2}.$$

Формирамо таблицу:

	$-\infty$	-1	3	7	
$x + 1$		-	+	+	+
$(x - 3)^2$		+	+	+	+
$x - 7$		-	-	-	+
$f'(x)$		+	-	-	+
f		↗	↘	↘	↗

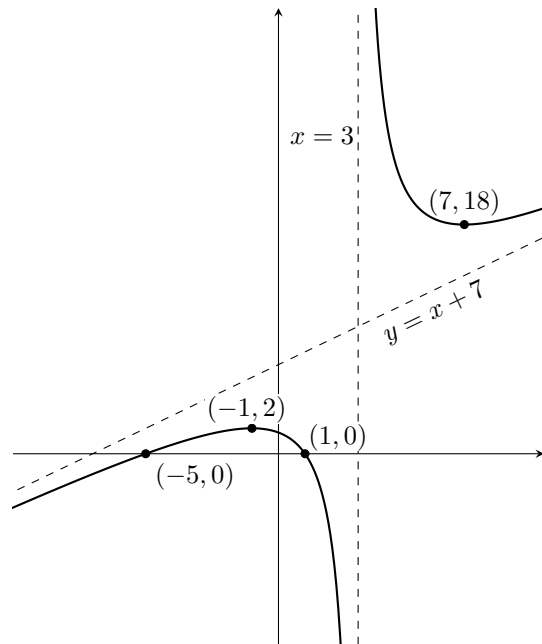
Дакле, f расте на интервалима $(-\infty, -1)$ и $(7, +\infty)$, а опада на $(-1, 3)$ и на $(3, 7)$. Локални максимум достиже се у тачки $x = -1$ ($f(-1) = 2$), а локални минимум у $x = 7$ ($f(7) = 18$).

6. *Конвексност и превојне тачке.* Рачунамо други извод функције f :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{x^2 - 6x - 7}{(x - 3)^2} \right)' \\ &= \frac{(2x - 6)(x - 3)^2 - (x^2 - 6x - 7) \cdot 2(x - 3)}{(x - 3)^4} \\ &= \frac{(2x - 6)(x - 3) - (x^2 - 6x - 7) \cdot 2}{(x - 3)^3} \\ &= \frac{2x^2 - 6x - 6x + 18 - 2x^2 + 12x + 14}{(x - 3)^3} \\ &= \frac{32}{(x - 3)^3}. \end{aligned}$$

Овде таблица није неопходна: други извод функције f негативан је на $(-\infty, 3)$ и ту је функција конкавна, а позитиван на $(3, +\infty)$, где је конвексна. Пошто $3 \notin D_f$, функција нема превојних тачака.

7. *График.* На основу претходних шест тачака, скицирамо график.



2. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{2 - \ln x}{x}.$$

1. *Домен.* Због дефинисаности количника мора бити $x \neq 0$, а због дефинисаности логаритма мора бити $x > 0$. Коначно, $D_f = (0, \infty)$.
2. *Парност.* Како домен функције није симетричан око нуле, функција није ни парна ни непарна.
3. *Нуле и знак.* На домену је увек $x > 0$, а важи и да је $2 - \ln x > 0$ ако и само ако је $\ln x < 2$, односно $x < e^2$. Закључујемо да је, за $x \in D_f$, $\text{sgn} f(x) = \text{sgn}(2 - \ln x)$. Поново можемо нацртати таблицу:

	0	e^2		
$2 - \ln x$		+		-
x		+		+
$f(x)$		+		-

Видимо да је функција f позитивна на интервалу $(0, e^2)$, а негативна на $(e^2, +\infty)$. Нула функције је $x = e^2$.

4. Асимптотике.

- **Вертикалне.** Због природе домена, тражимо их само у нули здесна. Пошто је

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{2 - (-\infty)}{0^+} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty,$$

закључујемо да права $x = 0$, тј. y -оса јесте вертикална асимптота функције f .

- **Хоризонталне.** Због природе домена, тражимо хоризонталну асимптоту само када $x \rightarrow +\infty$. Рачунамо да је

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \ln x}{x} \stackrel{\infty/\infty \text{ Л.П.}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0,$$

па је права $y = 0$, тј. x -оса, хоризонтална асимптота функције f када $x \rightarrow +\infty$.

- **Косе.** Пошто функција f има хоризонталну асимптоту када $x \rightarrow +\infty$, у тој бесконачности не може имати косу. У $-\infty$ свакако не може јер у њеној околини није дефинисана, па закључујемо да функција f нема косих асимптота.

5. Моноџоносни и локални екстремуми.

Рачунамо први извод:

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x - (2 - \ln x)}{x^2} = \frac{\ln x - 3}{x^2}.$$

И овде ћемо се послужити таблицом:

	0	e^3		
$\ln x - 3$		-		+
x^2		+		+
$f'(x)$		-		+
f		↘		↗

Дакле, f опада на $(0, e^3)$, а расте на $(e^3, +\infty)$. Локални минимум се достиже у e^3 и $f(e^3) = -e^{-3}$.

6. Конвексности и превојне тачке.

Рачунамо други извод:

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - (\ln x - 3) \cdot 2x}{x^4}$$

$$= \frac{1 - 2(\ln x - 3)}{x^3} = \frac{7 - 2 \ln x}{x^3}.$$

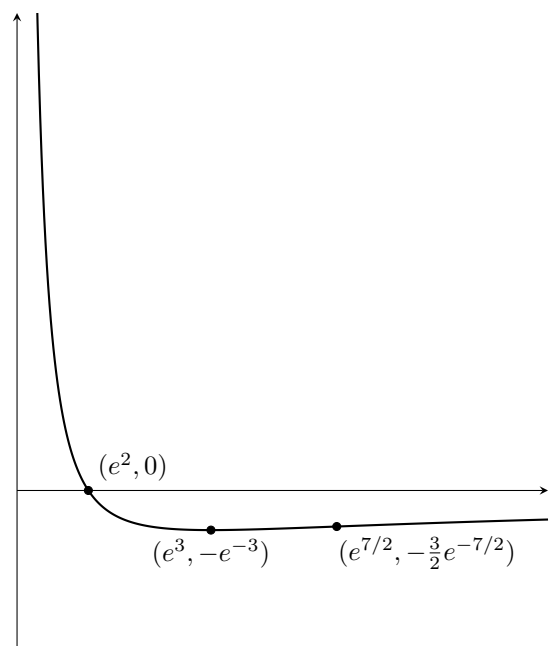
Поново имамо таблицу:

	0	$e^{7/2}$		
$7 - 2 \ln x$		+		-
x^3		+		+
$f''(x)$		+		-
f		∪		∩

Функција f је конвексна на $(0, e^{7/2})$, а конкавна на $(e^{7/2}, +\infty)$. Превија се у $e^{7/2}$ и превојна тачка је $(e^{7/2}, f(e^{7/2})) = (e^{7/2}, -3/2e^{-7/2})$.

7. График.

На основу претходних тачака, скицирамо график:



3. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{e^x}{x+1}.$$

1. **Домен.** Експоненцијална функција је дефинисана на целом скупу реалних бројева, па је $D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.
2. **Парности.** Функција f није ни парна ни непарна јер D_f није симетричан око нуле.
3. **Нуле и знак.** Како је e^x увек позитивно, то је знак функције f одређен знаком $x + 1$. Дакле, $f(x) > 0$ за $x > -1$, док је $f(x) < 0$ за $x < -1$. Функција нема нула, јер $-1 \notin D_f$.
4. **Асимптотике.**
 - **Вертикалне.** Кандидат за вертикалну асимптоту је права $x = -1$. Испитујемо граничне вредности слева и здесна. Имамо да је

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{e^{-1}}{0^-} = -\infty$$

и

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{e^{-1}}{0^+} = +\infty,$$

па је права $x = -1$ вертикална асимптота функције f с обе стране.

- *Хоризонталне.* Јасно је² да је

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

па f нема хоризонталних асимптота у $+\infty$. С друге стране,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x+1} \\ &\stackrel{\infty/\infty \text{ Л.П.}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \end{aligned}$$

па при $x \rightarrow -\infty$ имамо праву $y = 0$, тј. x -осу као хоризонталну асимптоту.

- *Косе.* Пошто смо при $x \rightarrow -\infty$ пронашли хоризонталну асимптоту функције f , знамо да у тој бесконачности она не може имати косу асимптоту. Проверићемо да ли она постоји када $x \rightarrow +\infty$. Имамо да је

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x(x+1)} = +\infty,$$

из истих разлога из којих не постоји ни хоризонтална асимптота када $x \rightarrow +\infty$. Закључујемо да функција f ни у једној бесконачности нема косих асимптота.

5. *Монононости и локални екстремуми.* Први извод функције f је

$$f'(x) = \frac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2} = \frac{xe^x}{(x+1)^2},$$

а одговарајућа таблица је

	$-\infty$	-1	0
x			
e^x	+	+	+
$(x+1)^2$	+	+	+
$f'(x)$	-	-	+
f	\searrow	\searrow	\nearrow

Функција f опада на $(-\infty, -1)$ и на $(-1, 0)$, а расте на $(0, \infty)$. Локални минимум се достиже у нули и $f(0) = 1$.

6. *Конвексности и превојне тачке.* Рачунамо други извод:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(e^x + xe^x)(x+1)^2 - xe^x \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{(e^x + xe^x)(x+1) - xe^x \cdot 2}{(x+1)^3} \end{aligned}$$

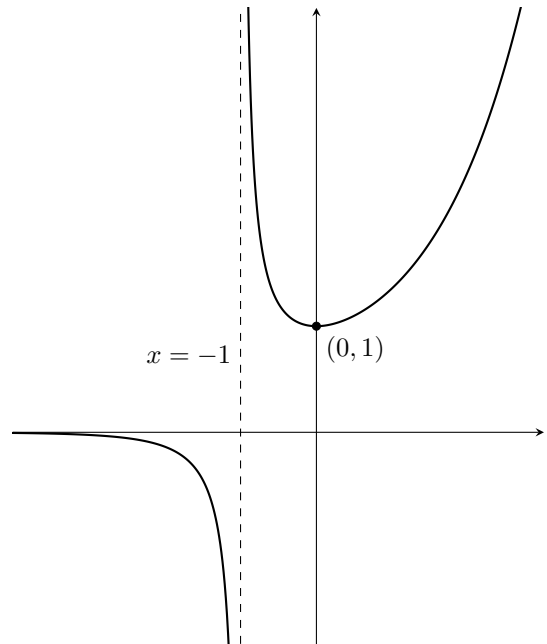
²Нпр. тривијалном применом Лопиталовог правила.

³ D_f јесте симетричан око нуле, па смо закључак морали да изведемо по дефиницији.

$$\begin{aligned} &= \frac{x^2 + 2x + 1 - 2x}{(x+1)^3} e^x \\ &= \frac{(x^2 + 1)e^x}{(x+1)^3}. \end{aligned}$$

Бројилац је увек позитиван, док је именилац негативан за $x < -1$, а позитиван за $x > -1$. Дакле, f је конкавна на $(-\infty, -1)$, а конвексна на $(-1, \infty)$. Функција нема превојних тачака јер $-1 \notin D_f$.

7. *График.* На основу претходних тачака, скицирамо график:



Додатни решени задаци

4. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = (x+2)e^{1/x}.$$

1. *Домен.* $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
2. *Парности.* Функција није ни парна ни непарна. Нпр, $f(1) = 3e$, док је $f(-1) = 1/e$. Ови бројеви нису ни једнаки ни супротни.³
3. *Нуле и знак.*

	$-\infty$	-2	0
$x+2$			
$e^{1/x}$	+	+	+
$f(x)$	-	+	+

Јасно, функција f је негативна на $(-\infty, -2)$, а позитивна на $(-2, 0)$ и на $(0, +\infty)$. Важи да је $f(-2) = 0$.

4. *Асимптоше.*

- *Вертикалне*. Нула је једина рубна тачка домена. Имамо да је

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2 \cdot e^{1/0^-} = 2 \cdot e^{-\infty} = 2 \cdot 0 = 0,$$

док је

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2 \cdot e^{1/0^+} = 2 \cdot e^{+\infty} = +\infty,$$

па је $x = 0$ вертикална асимптота само с једне стране.

- *Хоризонталне/косе*. Имамо да је, при $x \rightarrow \pm\infty$,

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+2) \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o(1/x^2) \right) \\ &= x + 3 + \frac{5}{2x} + o(1/x), \end{aligned}$$

па је $y = x+3$ коса асимптота наше функције у обе бесконачности, и то је у $+\infty$ изнад, а у $-\infty$ испод асимптоте.

5. *Моноћносноћ и локални екстремуми*. Након краћег рачуна, добијамо да је

$$f'(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{x^2} e^{1/x},$$

одакле формирамо таблицу:

	$-\infty$	-1	0	2	
$x+1$	-	+	+	+	→
$x-2$	-	-	-	+	→
$e^{1/x}/x^2$	+	+	+	+	→
$f'(x)$	+	-	-	+	→
f	↗	↘	↘	↗	

Дакле, f расте на $(-\infty, -1)$ и на $(2, \infty)$, а опада на $(-1, 0)$ и на $(0, 2)$. Локални максимум f има у -1 и $f(-1) = 1/e$, а локални минимум у 2 и $f(2) = 4\sqrt{e}$. Такође је⁴

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 0,$$

па се функција с леве стране приближава нули под углом нула, то јест „равно“.

6. *Конвексноћ и превојне тачке*. Након краћег рачуна, који и овде изостављамо, добијамо да је

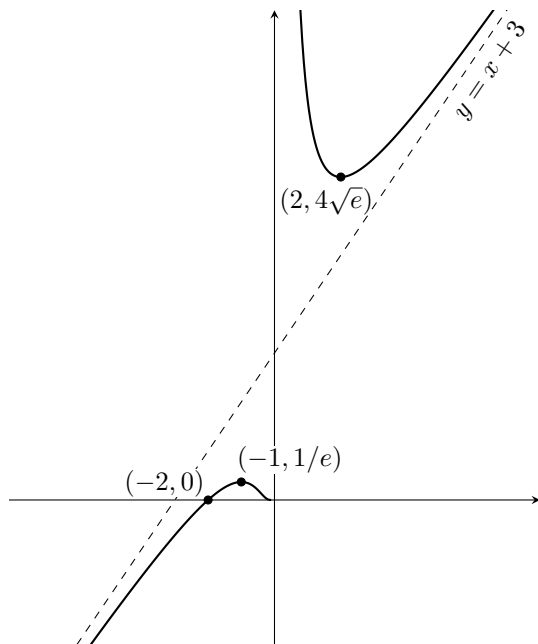
$$f''(x) = \frac{5x+2}{x^4} e^{1/x},$$

одакле формирамо таблицу:

	$-\infty$	$-2/5$	0	
$5x+2$	-	+	+	→
$e^{1/x}$	+	+	+	→
$f''(x)$	-	+	+	→
f	∩	∪	∪	

Функција f је конвексна на $(-2/5, 0)$ и на $(0, +\infty)$, а конкавна на $(-\infty, -2/5)$. Постоји превој у $x = -2/5$ и $f(-2/5) = 8e^{5/2}/5$, па је превојна тачка $(-2/5, 8e^{5/2}/5)$.

7. *График*.



5. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \ln \left(\frac{(1+x)^2}{2x} \right).$$

1. *Домен*. Мора бити $(1+x)^2/2x > 0$, односно $x > 0$. Дакле $D_f = (0, \infty)$.
2. *Парносноћ*. Функција није ни парна и непарна јер D_f није симетричан око нуле.
3. *Нуле и знак*. На основу особина природног логаритма имамо да је

$$\begin{aligned} f(x) < 0 &\iff 0 < \frac{(1+x)^2}{2x} < 1 \\ &\iff 0 < 1 + 2x + x^2 < 2x \\ D_f &\stackrel{(0, \infty)}{\iff} 1 + x^2 < 0, \end{aligned}$$

што је немогуће. Дакле, $(\forall x \in D_f) f(x) > 0$. Функција нема нуле.

4. *Асимптоће*.

- *Вертикалне*. Испитујемо нулу као једину граничну тачку домена. Имамо да је

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left(\frac{(1+x)^2}{2x} \right) = \ln \left(\frac{1}{0^+} \right) = \ln(+\infty) = +\infty,$$

па је права $x = 0$ вертикална асимптота функције f .

⁴Нпр. на основу Лопиталовог правила.

- *Хоризонталне.* Због домена, испитујемо само случај $x \rightarrow +\infty$. Имамо да је:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{(1+x)^2}{2x} \right) = \ln(+\infty) = +\infty,$$

па f нема хоризонталну асимптоту.

- *Косе.* Поново, испитујемо само случај $x \rightarrow +\infty$. Имамо да је:

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(\frac{(1+x)^2}{2x} \right)}{x}$$

$$\stackrel{\infty/\infty \text{ Л.П.}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x(x+1)} = 0.$$

Одмах закључујемо да f нема косу асимптоту; када би n било коначно, асимптота би била облика $y = 0x + n$, што је хоризонтална асимптота, а већ знамо да такву f нема.

5. *Моноџоносѝ и локални екстремуми.* Директним рачуном добијамо да је

$$f'(x) = \frac{x-1}{x(x+1)},$$

па, пошто је именилац увек позитиван на домену, закључујемо да је $f'(x) < 0$ за $x \in (0, 1)$ и $f'(x) > 0$ за $x > 1$. Дакле, f опада на $(0, 1)$, расте на $(1, \infty)$ и има локални минимум у тачки $x = 1$: $f(1) = \ln 2$.

6. *Конвексносѝ и њревојне тачке.* Имамо да је

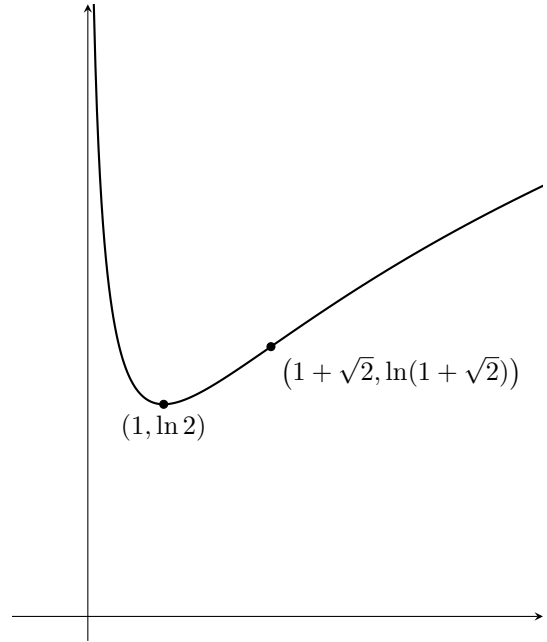
$$f''(x) = \frac{-x^2 + 2x + 1}{x^2(x+1)^2}$$

$$= \frac{-(x - (1 - \sqrt{2}))(x - (1 + \sqrt{2}))}{x^2(x+1)^2}$$

$$= \underbrace{\frac{(x - (1 - \sqrt{2}))}{x^2(x+1)^2}}_{>0 \text{ на } D_f} \left((1 + \sqrt{2}) - x \right),$$

па закључујемо да је $f''(x) > 0$ на $(0, 1 + \sqrt{2})$ и на том интервалу је f конвексна, а $f''(x) < 0$ на $(1 + \sqrt{2}, \infty)$ и на том интервалу је f конкавна. Функција има превој за $x = 1 + \sqrt{2}$ и $f(1 + \sqrt{2}) = \dots = \ln(1 + \sqrt{2})$, па је превојна тачка $(1 + \sqrt{2}, \ln(1 + \sqrt{2}))$.

7. *График.*



6. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \sqrt[3]{x(x+1)^2}.$$

1. *Домен.* Пошто је трећи корен дефинисан за сваки реалан број, имамо да је $D_f = \mathbb{R}$.
2. *Парносѝ.* Имамо да је $f(1) = \sqrt[3]{4}$, док је $f(-1) = 0$. Ова два броја нису ни једнака ни супротна, па функција f није ни парна ни непарна.
3. *Нуле и знак.* Пошто је знак трећег корена једнак знаку његовог аргумента, имамо да је $\text{sgn} f(x) = \text{sgn}(x(x+1)^2)$. Израз је довољно једноставан да не морамо да формирамо таблицу, и закључујемо да је $f(x) < 0$ за $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ и $f(x) > 0$ за $x \in (0, +\infty)$. Имамо и да је $f(-1) = f(0) = 0$.
4. *Асимптотѝе.*

- *Вертикалне.* Функција нема вертикалних асимптота јер је њен домен једнак целом скупу реалних бројева.
- *Хоризонталне.* Јасно је да је

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty,$$

па функција f нема хоризонталних асимптота.

- *Косе.* Када $x \rightarrow \pm\infty$, имамо да је

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 \left(1 + \frac{1}{x} \right)}$$

$$= x \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{2/3}$$

$$= x \left(1 + \frac{2}{3x} + \binom{2/3}{2} \frac{1}{x^2} + o(1/x^2) \right)$$

$$= x \left(1 + \frac{2}{3x} + \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} - 1 \right) \frac{1}{x^2} + o(1/x^2) \right)$$

$$= x + \frac{2}{3} - \frac{1}{9x} + o(1/x),$$

па је права $y = x + 2/3$ коса асимптота функције f у обе бесконачности. Када $x \rightarrow +\infty$, функција је испод, а када $x \rightarrow -\infty$, изнад косе асимптоте.

5. *Моноитоносћ и локални екстремуми.* Рачунамо први извод:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3} (x(x+1))^2)^{-2/3} ((x+1)^2 + 2x(x+1)) \\ &= \frac{3x^2 + 4x + 1}{3\sqrt[3]{x^2(x+1)^4}} = \frac{(x+1)(x+1/3)}{\sqrt[3]{x^2(x+1)^4}}. \end{aligned}$$

На основу њега, формирамо таблицу:

	$-\infty$	-1	$-1/3$	0
$x+1$		-	+	+
$\sqrt[3]{x^2(x+1)^2}$		+	+	+
$x+1/3$		-	-	+
$f'(x)$		+	-	+
f		↗	↘	↗

Функција f расте на $(-\infty, -1)$, на $(-1/3, 0)$ и на $(0, +\infty)$, а опада на $(-1, -1/3)$. Локални максимум се достиже за $x = -1$ и једнак је нули, а локални минимум за $x = -1/3$ и једнак је $f(-1/3) = -\sqrt[3]{4}/3$.

Овде морамо бити опрезни. Први извод није добро дефинисан у -1 и 0 . Морамо видети шта се у тим тачкама дешава са функцијом, да бисмо знали под којим углом функција пролази кроз те тачке. То радимо тако што рачунамо граничну вредност првог извода у тим тачкама. Уколико запишемо да је

$$f'(x) = \frac{x+1/3}{\sqrt[3]{x^2(x+1)}},$$

није тешко уочити да је

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = \frac{-2/3}{0^-} = +\infty$$

и

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = \frac{-2/3}{0^+} = +\infty.$$

Након што се, испитивањем конвексности, испостави да је функција конвексна с обе стране тачке -1 , биће нам јасно да у тој тачки график има „шиљак”.

Слично је и

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f'(x) = \frac{1/3}{0^\pm} = +\infty,$$

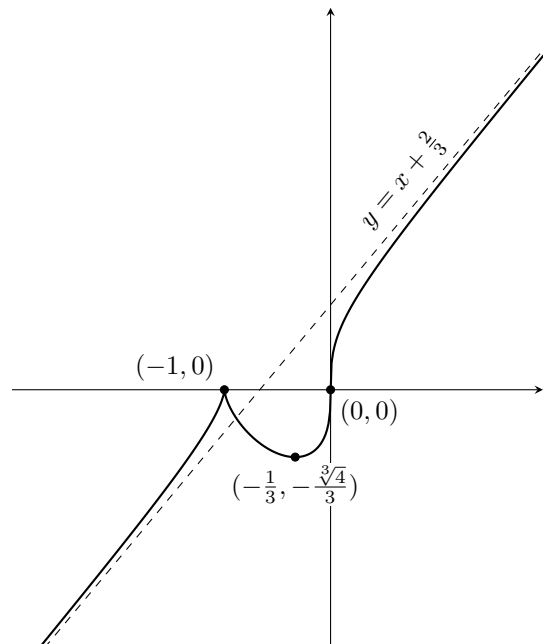
али ћемо видети да ће се у тој тачки мењати конвексност, па ће она бити превојна и кроз њу ће функција „проћи усправно”.

6. *Конвексносћ и превојне тачке.* Имамо да је

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{3x^2 + 4x + 1}{3\sqrt[3]{x^2(x+1)^4}} \right)' \\ &= \frac{(6x+4) \cdot 3\sqrt[3]{x^2(x+1)^4} - (3x^2+4x+1) \cdot \frac{2x(x+1)^4 + 4x^2(x+1)^3}{\sqrt[3]{x^4(x+1)^8}}}{9\sqrt[3]{x^4(x+1)^8}} \\ &= \frac{(6x+4) \cdot 3x^2(x+1)^4 - (3x+1)(x+1)[2x(x+1)^4 + 4x^2(x+1)^3]}{9x^2(x+1)^5\sqrt[3]{x^2(x+1)}} \\ &= \frac{3x^2(6x+4)(x+1)^4 - x(3x+1)(x+1)^4(2(x+1)+4x)}{9x^2(x+1)^5\sqrt[3]{x^2(x+1)}} \\ &= \frac{3x(6x+4) - (3x+1)(6x+2)}{9x(x+1)\sqrt[3]{x^2(x+1)}} \\ &= \frac{18x^2 + 12x - 18x^2 - 6x - 6x - 2}{9x(x+1)\sqrt[3]{x^2(x+1)}} \\ &= \frac{-2}{9x\sqrt[3]{x^2(x+1)^4}}, \end{aligned}$$

што мења знак само у нули. Превојна тачка је $(0, 0)$, а f је конвексна на $(-\infty, -1)$ и на $(-1, 0)$, а конкавна на $(0, \infty)$.

7. *График.* На основу стандардно испитаних шест тачака, заједно са додатним дискусијама које су последица природе функције, скицирамо график.



Задаци за самосталан рад

7. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x^2}}.$$

8. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-x}.$$

9. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-x}.$$

10. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \ln(x^2 - 5x + 7).$$

11. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x+1}}.$$