Теоријске основе

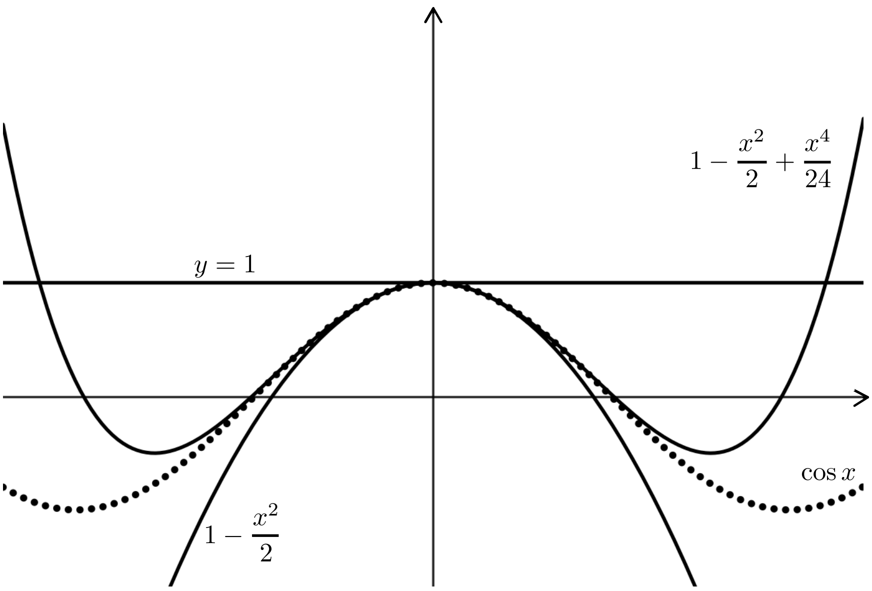
У наставку је кратак преглед знања које је неопходно за решавање задатака који следе. Он никако није замена за предавања.

У свом досадашњем образовању срели смо широк спектар функција, од полинома, рационалних функција, експоненцијалне и логаритамске функције, затим тригонометријских и инверзних тригонометријских функција итд. Неке од њих су веома једноставне, попут полинома, и лако је срачунати њихову вредност у било којој тачки.

Међутим, неке од њих су дефинисане веома апстрактно, и са њима је тешко радити. На пример, знамо колико је $\sin(\pi/3)$, па бисмо некако умели да се снађемо и израчунамо колико је $\sin 10°$, тј. $\sin(\pi/18)$, уколико би нам то затребало. Али, тешко да бисмо знали, рецимо, израчунати колико тачно износи $\sin 7°11'19''$, или која је вредност $\sin 5$ (радијана, не степени).

У свим практичним ситуацијама у којима се математика примењује, нпр. у инжењерству, није важно знати колико *тачно* износи вредност неке функције, већ колико она *приближно* износи, и колика је процењена грешка те апроксимације.

У овој лекцији бавићемо се апроксимацијом функција полиномима. Полиноми су једна од најпријатнијих класа функција за рад јер су непрекидни, диференцијабилни бесконачно много пута, а рачунар са њима веома лако и јефтино обавља све потребне операције.



Слика 1: Апроксимација косинуса

На Слици 1 дат је пример три полинома који апроксимирају функцију $\cos x$ у околини нуле, а то су 1, затим $1-x^2/2$ и $1-x^2/2+x^4/24$. Сваки од њих се са косинусом поклапа само у нули, али је јасно да је грешка апроксимације у *околини* нуле различита, и да трећи полином најбоље од свих апроксимира косинус. Остаје питање како смо дошли до тих полинома.

Идеја је прилично једноставна. За функцију f, коју апроксимирамо у околини тачке x_0, претпоставићемо да има првих n извода, и апроксимираћемо је полиномом T_n тако да буде $f(x_0)=T_n(x_0)$, али и да им се поклопи свих n извода:

$$f^{(k)}(x_0)=T_n^{(k)}(x_0), \quad k=1,2,\dots,n.$$

Након извесног рачунања, испоставља се да је тај полином облика

$$T_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \tag{1}$$

Овај полином зове се ***Тејлоров***[1] ***полином функције*** f ***у околини тачке (или у тачки)*** x_0. Из историјских разлога, уколико је $x_0=0$, онда ћемо рећи да је T_n ***Маклоренов***[2] ***полином.***

Мало о нотација

У околини тачке x_0, генерално, Тејлоров полином није једнак функцији коју апроксимира, већ прави неку грешку. Та грешка се углавном не може тачно

[1] Brook Taylor (1685–1731), енглески математичар и адвокат
[2] Colin Maclaurin/Cailean MacLabhruinn (1698–1746), шкотски математичар

одредити (иначе нам не би ни требала апроксимација), али се о њој може доста тога рећи. У математичкој анализи, она се назива *остатак* Тејлоровог полинома. За њега ћемо користити ознаку $R_n(x)$.

Постоји много облика тог остатка, а нама ће у задацима најзгоднији бити *Пеанов*:

$$R_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right), \quad x \to x_0.$$

Сада ћемо да појаснимо шта горње ознаке значе.

Када напишемо да је $f(x) = o\left(g(x)\right)$ када $x \to x_0$, ми желимо да кажемо да је функција f, у околини тачке x_0, занемарљива у односу на функцију g. Суштински, то значи да је

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

На пример $x^2 = o(x^3)$ када $x \to +\infty$, али је $x^3 = o(x^2)$ када $x \to 0$. Зато је увек неопходно нагласити о којој тачки x_0 је реч. Како би дефиниција обухватила и оне случајеве у којима функција g може бити нула, сама дефиниција малог о се благо модификује, па кажемо да је $f(x) = o\left(g(x)\right)$ када $x \to x_0$ уколико је

$$f(x) = \alpha(x)g(x),$$

при чему је $\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$. Дефиниција има сасвим исто значење које смо управо појаснили, али се избегава дељење нулом.

Дакле, $o\left(f(x)\right)$ није једна конкретна функција, већ је то заправо класа свих функција које су занемарљиве у односу на f у околини назначене тачке x_0. Отуда важе и следећа правила (при $x \to x_0$):[3]

1. $o\left(f(x)\right) \pm o\left(f(x)\right) = o\left(f(x)\right)$;
2. $o\left(c \cdot f(x)\right) = c \cdot o\left(f(x)\right) = o\left(f(x)\right)$, где је $c \neq 0$;
3. $o\left(o\left(f(x)\right)\right) = o\left(f(x)\right)$;
4. $o\left(f(x) + o\left(f(x)\right)\right) = o\left(f(x)\right)$;
5. $o\left((f(x))^n\right) = \left(o\left(f(x)\right)\right)^n$.

Таблични Маклоренови полиноми

Као и код граничних вредности и извода, неке функције су довољно честе у нашем раду да ћемо њихове Маклоренове (дакле, Тејлорове за $x_0 = 0$) полиноме учити напамет. У питању је следећих пет:

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),\\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}),\\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^n),\\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}),\\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n),
\end{aligned}$$

где је

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-(k-1))}{k!}$$

тзв. уопштени биномни коефицијент.

Често се, уместо Тејлоров/Маклоренов полином, каже *развој*. Употреба тог термина постаће јаснија сваком ко савлада теорију са предавања на ову тему, а ми се даље нећемо у то удубљивати и користићемо оба термина.

Задаци који се раде на вежбама

1. Нека је дата функција $f(x) = x^2 \ln x$. Одредити њен Тејлоров полином трећег степена у околини тачке $x_0 = 1$.

Пошто је дата тачка $x_0 = 1$, не можемо се позвати ни на какве познате Маклоренове полиноме, већ рачунамо ручно по формули (1). Код нас је $n = 3$, јер се тражи полином трећег степена, па је

$$T_3(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f^{(3)}(1)}{3!}(x-1)^3.$$

Рачунамо прва три извода наше функције:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2x\ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x\ln x + x,\\
f''(x) &= 2\ln x + 2x \cdot \frac{1}{x} + 1 = 2\ln x + 3,\\
f^{(3)}(x) &= \frac{2}{x}.
\end{aligned}$$

Даље, рачунамо вредност функције и њених извода у тачки $x_0 = 1$:

$$\begin{aligned}
f(1) &= 1 \cdot \ln 1 = 0,\\
f'(1) &= 2\ln 1 + 1 = 1,\\
f''(1) &= 2\ln 1 + 3 = 3,\\
f^{(3)}(1) &= 2.
\end{aligned}$$

Сада остаје само да уврстимо срачунате изводе у Тејлоров полином и добијемо да је

$$\begin{aligned}
T_3(x) &= 0 + 1 \cdot (x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2 + \frac{2}{6}(x-1)^3\\
&= x - 1 + \frac{3}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3.
\end{aligned}$$

На наше потребе, није неопходно даље сређивати израз.

Препоручујемо читаоцу да у овом тренутку искористи софтвер по жељи и нацрта функцију f и полином T_3 и увери се у квалитет апроксимације у околини тачке x_0.

2. Нека је дата функција $f(x) = \cos x - e^{-x^2/2}$. Одредити њен Маклоренов полином четвртог степена.

[3] Знак једнакости треба схватити симболично, иначе изрази немају смисла; нпр, прво правило читамо као „збир или разлика занемарљиво малих функција у односу на f је (нека нова) занемарљиво мала функција у односу на f".

У овом задатку искористићемо познате развоје за косинус и експоненцијалну функцију. Прво је

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4), \quad x \to 0.$$

Затим, треба да развијемо $e^{-x^2/2}$ у Маклоренов полином. Пошто је сам аргумент $(-x^2/2)$ наше експоненцијалне функције степена два, онда ће бити довољно искористити Маклоренов полином степена два за e^x. Дакле, пошто је $e^t = 1 + t + t^2/2 + o(t^2)$ када $t \to 0$, онда је

$$\begin{aligned} e^{-x^2/2} &= 1 + \left(-\frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + o\left(\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2\right) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4), \quad x \to 0. \end{aligned}$$

Коначно,

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x - e^{-x^2/2} \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)\right) \\ &= \frac{x^4}{24} - \frac{3x^4}{24} + o(x^4) - o(x^4) \\ &= -\frac{1}{12}x^4 + o(x^4), \quad x \to 0, \end{aligned}$$

па је тражени Маклоренов полином

$$M_4(x) = -\frac{1}{12}x^4.$$

Ако сте помислили да је у претходном израчунавању $o(x^4) - o(x^4) = 0$, у овом тренутку прекините читање ових редова и вратите се на теоријски увод.

3. Испитати непрекидност функције

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x} - \sin 2x - 1 - 2x^2}{x^3}, & x \neq 0, \\ 3, & x = 0. \end{cases}$$

Функција f је непрекидна у свакој тачки $x \neq 0$ као композиција непрекидних функција. Остаје још да проверимо да ли је гранична вредност функције f када $x \to 0$ једнака броју три. За $x \neq 0$, имамо да је

$$\begin{aligned} &e^{2x} - \sin 2x - 1 - 2x^2 \\ &\quad = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{6} + o(x^3) \\ &\qquad\qquad - \left(2x - \frac{(2x)^3}{6} + o(x^3)\right) - 1 - 2x^2 \\ &\quad = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + o(x^3) \\ &\qquad\qquad - \left(2x - \frac{4x^3}{3} + o(x^3)\right) - 1 - 2x^2 \\ &\quad = \frac{8}{3}x^3 + o(x^3), \quad x \to 0. \end{aligned}$$

Даље је

$$f(x) = \frac{e^{2x} - \sin 2x - 1 - 2x^2}{x^3} = \frac{\frac{8}{3}x^3 + o(x^3)}{x^3} = \frac{\frac{8}{3} + o(1)}{1},$$

па је сада очигледно да је

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{8}{3}.$$

Како је $3 \neq 8/3$, функција f није непрекидна у нули, и коначан је закључак да је непрекидна свуда, осим у нули.

Да не буде забуне, $o(1)$ нам представља неку функцију која тежи нули када је поделимо бројем један, тј. она тежи нули сама по себи, па отуда и закључак. Такође, степен имениоца био нам је сугестија до ког степена треба да развијамо функције које фигуришу у изразу.

4. Израчунати

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \left(\cos x\right)^{\sin x}}{x^3}.$$

Због пријатнијег записа, повремено ћемо писати $\exp x$ уместо e^x. Степен три у имениоцу говори нам да све развоје вршимо до степена три (мада ће бити и „вишкова"). Такође, косинус развијамо до степена два, јер је његов Маклоренов полином степена три заправо његов Маклоренов полином степена два; ово је зато јер косинус има само парне степене x у свом Маклореновом полиному.

Имамо да је

$$\begin{aligned} &\left(\cos x\right)^{\sin x} \\ &= \exp\left(\ln\left(\cos x\right)^{\sin x}\right) \\ &= \exp\left(\sin x \cdot \ln\left(\cos x\right)\right) \\ &= \exp\left(\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \cdot \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\right) \\ &= \exp\left(\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \cdot \ln\left(1 + \left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\right)\right) \\ &= \exp\Bigg(\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \cdot \\ &\qquad \cdot \left(\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) + \underbrace{o\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}_{=o(x^2)}\right)\Bigg) \\ &= \exp\left(\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \cdot \left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\right) \\ &= \exp\Bigg(-\frac{x^3}{2} + \underbrace{xo(x^2) + \frac{x^5}{12} - \frac{x^3}{6}o(x^2) - \frac{x^2}{2}o(x^3) + o(x^3)o(x^2)}_{=o(x^3)}\Bigg) \\ &= \exp\left(-\frac{x^3}{2} + o(x^3)\right) \\ &= 1 + \left(-\frac{x^3}{2} + o(x^3)\right) + o\left(\left(-\frac{x^3}{2} + o(x^3)\right)\right) \\ &= 1 - \frac{x^3}{2} + o(x^3), \quad x \to 0, \end{aligned}$$

па је

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\big(\cos x\big)^{\sin x}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right)}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{2}+o(x^3)}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}+o(1)}{1}=\frac{1}{2}.$$

5. Израчунати
$$\lim_{x\to 0}\frac{4\ln(\cos x+x\sin x)-2x^2}{x^4}.$$

Развијамо до четвртог степена. Имамо да је

$$\ln(\cos x+x\sin x)$$
$$=\ln\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}o(x^4)+x\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\right)$$
$$=\ln\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}o(x^4)+x^2-\frac{x^4}{6}+o(x^4)\right)$$
$$=\ln\left(1+\frac{x^2}{2}-\frac{3x^4}{24}+o(x^4)\right)$$
$$\overset{!!!}{=}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{3x^4}{24}+o(x^4)\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{3x^4}{24}+o(x^4)\right)^2+o(x^4)$$
$$=\frac{x^2}{2}-\frac{3x^4}{24}+o(x^4)-\frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}+o(x^4)\right)+o(x^4)$$
$$=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}+o(x^4),$$

па је

$$\lim_{x\to 0}\frac{4\ln(\cos x+x\sin x)-2x^2}{x^4}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2-x^4+o(x^4)-2x^2}{x^4}=-1.$$

Једнакост означена као !!! јесте место где се најчешће греши. Погрешно је водити се логиком *„оно што сам записао већ има у себи x^4, па не морам даље да развијам, јер је остатак $o(x^4)$"*. То није тачно, јер у изразу који смо записали има и степен x^2, па кад се цели израз квадрира, *већина* сабирака ће бити $o(x^4)$, али не и сви.

6. Израчунати
$$\lim_{x\to +\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right).$$

Пошто $x\to+\infty$, на први поглед се чини да не можемо применити ниједан од развоја. Ипак, када x тежи бесконачности, $1/x$ тежи нули, па се могу примењивати Маклоренови развоји, али по аргументу $1/x$. То ћемо и урадити, и срачунати:

$$\lim_{x\to +\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$
$$=\lim_{x\to +\infty}\left(x-x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right)$$
$$=\lim_{x\to +\infty}\left(x-x+\frac{1}{2}+o(1)\right)$$
$$=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)$$
$$=\frac{1}{2}.$$

7. Одредити косе асимптоте функције $f(x)=xe^{1/x}$.

Примењујемо сличну идеју као у претходном задатку, тј. користимо чињеницу да $1/x\to 0$ када $x\to\pm\infty$. Зато је

$$f(x)=xe^{1/x}=x\left(1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)=x+1+o(1),$$

када $x\to\pm\infty$. Дакле, записали смо функцију као збир праве $x+1$ и нечег што тежи нули, па је $y=x+1$ коса асимптота наше функције у обе бесконачности, по дефиницији.

Уколико бисмо скицирали график функције f, било би згодно у горњем рачуну ићи до наредног степена:

$$f(x)=xe^{1/x}=x\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$
$$=x+1+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Како је $o(1/x)$ занемарљиво у односу на $1/2x$ када $x\to\pm\infty$, закључујемо да ће знак израза

$$\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

за x довољно далеко од нуле, пратити знак од $1/2x$, што је позитивно кад $x\to+\infty$, а негативно кад $x\to-\infty$. Овакво резоновање омогућава нам да извучемо још један закључак, а то је да је при $x\to+\infty$ функција изнад, а при $x\to-\infty$ испод асимптоте $y=x+1$.

8. Одредити косе асимптоте функције $f(x)=\sqrt{x^2+x}$.

Овај задатак смо већ радили, а овде ћемо га урадити помоћу Маклоренових полинома. При $x\to\pm\infty$ је:

$$f(x)=\sqrt{x^2+x}=\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}=|x|\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/2}$$
$$=|x|\left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

Важи да је $|x|=x$ када $x\to+\infty$, па је тада

$$f(x)=x+\frac{1}{2}+o(1),$$

то јест права $y=x+1/2$ је коса асимптота функције f када $x\to+\infty$. Слично је и $y=-x-1/2$ коса асимптота функције f када $x\to-\infty$.

И у овом задатку важи слична напомена о развијању до другог степена, као и у претходном.

Додатни решени задаци

9.

а) Одредити Маклоренове полиноме четвртог степена за функције $f(x) = e^{2x^2}$ и $g(x) = \cos(\sin x)$.

б) Израчунати граничну вредност

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2 + 2\cos x - 2}{e^{2x^2} + 4\cos(\sin x) - 5}.$$

а) Имамо да је

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + 2x^2 + \frac{1}{2}4x^4 + o(x^4) \\ &= 1 + 2x^2 + 2x^4 + o(x^4), \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} g(x) &= \cos\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)\right) + \frac{1}{24}\left(x^4 + o(x^4)\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

б)

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2 + 2\cos x - 2}{e^{2x^2} + 4\cos(\sin x) - 5} \\ = &\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + o(x^4) + 2\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right) - 2}{1 + 2x^2 + 2x^4 + 4\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)\right) - 5} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)}{\frac{17}{6}x^4 + o(x^4)} \\ &= \frac{1/12}{17/6} = \frac{1}{34}. \end{aligned}$$

10. а) Одредити Маклоренове полиноме четвртог степена функција

$$f(x) = \cos(x^2), \quad g(x) = \ln\big(\cos(x^2)\big)$$

$$\text{и} \quad h(x) = e^{\cos(x^2)\ln\left(\cos(x^2)\right)}$$

б) Користећи резултат из дела а), или на други начин, израчунати

$$\lim_{x\to 0} \frac{\big(\cos(x^2)\big)^{\cos(x^2)} - 1 + \frac{3}{2}x^4}{x^4}.$$

а) Имамо да је

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x^2 = 1 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) \\ g(x) &= \ln(\cos x^2) = \ln\left(1 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)\right) \\ &= -\frac{1}{2}x^4 + o(x^4), \\ h(x) &= e^{\left(1 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)\right)\left(-\frac{1}{2}x^4 + o(x^4)\right)} \\ &= e^{-\frac{1}{2}x^4 + o(x^4)} = 1 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) + o(x^4) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

б)

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0} \frac{\big(\cos(x^2)\big)^{\cos(x^2)} - 1 + \frac{3}{2}x^4}{x^4} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{e^{\ln\left(\cos(x^2)\right)^{\cos(x^2)}} - 1 + \frac{3}{2}x^4}{x^4} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{e^{\cos(x^2)\ln\left(\cos(x^2)\right)} - 1 + \frac{3}{2}x^4}{x^4} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) - 1 + \frac{3}{2}x^4}{x^4} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^4 + o(x^4)}{x^4} \\ &= 1. \end{aligned}$$

11. а) Одредити Маклоренове полиноме трећег степена функција $f(x) = e^{e^x - 1}$ и $g(x) = \big(1 + 2x^2\big)^{\frac{1}{2}}$.

б) Користећи резултат из дела а), или на други начин, израчунати граничну вредност

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{e^x - 1} - \sqrt{1 + 2x^2} - \sin x}{x^3}.$$

а) Имамо да је (при $x \to 0$)

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{e^x - 1} = e^{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - 1} \\ &= e^{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)} \\ &= 1 + \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{6}\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 + o(x^3) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) + \frac{1}{2}\left(x^2 + x^3 + o(x^3)\right) \\ &\quad + \frac{1}{6}\left(x^3 + o(x^3)\right) + o(x^3) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 + x + x^2 + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) x^3 \\
&= 1 + x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3),
\end{aligned}
$$

одакле закључујемо да је полином $1 + x + x^2 + 5x^3/6$ Маклоренов полином трећег степена функције f. Слично, рачунамо да је

$$
\begin{aligned}
g(x) = (1 + 2x^2)^{1/2} &= 1 + \frac{1}{2} \cdot 2x^2 + o(x^3) \\
&= 1 + x^2 + o(x^3),
\end{aligned}
$$

јер би већ наредни степен у развоју био 4. Дакле, полином $1+x^2$ јесте Маклоренов полином трећег степена функције g.

б) Користимо чињеницу да је (при $x \to 0$) $\sin x = x - x^3/6 + o(x^3)$ и резултат из дела а) да добијемо:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{e^{e^x - 1} - \sqrt{1 + 2x^2} - \sin x}{x^3} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1 + x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3) - \left(1 + x^2 + o(x^3)\right) - \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)}{x^3} \\
&= \frac{x^3 + o(x^3)}{x^3} = 1.
\end{aligned}
$$

Задаци за самосталан рад

12. а) Одредити Маклоренове полиноме петог степена функција $f(x) = (1 + x)^{1/3}$ и $g(x) = \sin(\sin x)$.

б) Користећи резултат из дела а), или на други начин, израчунати

$$
\lim_{x\to 0} \frac{x^3 \cdot \sqrt[3]{1 + x} + 3\sin(\sin x) + \frac{73}{90}x^5 - \frac{x^4}{3} - 3x}{x^5}.
$$

13. а) Одредити Маклоренов полином трећег степена функције $f(x) = \ln\left(\dfrac{1 - 2x}{1 + 2x}\right)$.

б) Користећи резултат из дела а), или на други начин, израчунати граничну вредност

$$
\lim_{x\to 0} \frac{3x + \ln\sqrt{\frac{1 - 2x}{1 + 2x}} - x\cos x}{x^3}.
$$

14. Израчунати

$$
\lim_{x\to\infty} \left(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\right)^x.
$$

15. а) Одредити Маклоренове полиноме трећег степена за функције $f(x) = \cos(x - x^2)$ и $g(x) = \ln(1 + 3x)$.

б) Користећи резултат из дела а), или на други начин, израчунати граничну вредност

$$
\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x - x^2) - \ln(1 + 3x) - 1 + 3x - 4x^2}{x^3}.
$$