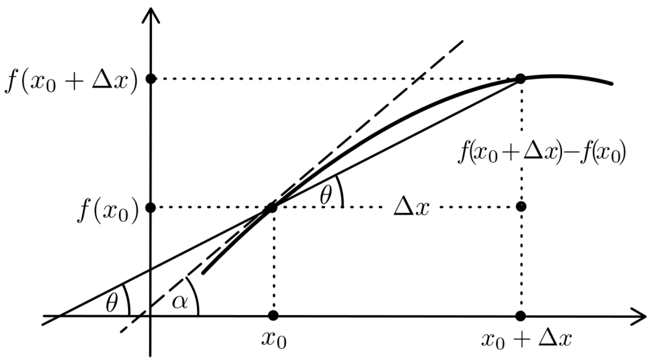
Теоријске основе

У наставку је кратак преглед знања које је неопходно за решавање задатака који следе. Он никако није замена за предавања.

Функције које у математици анализирамо са чисто теоријске тачке гледишта, у пракси се често користе за описивање стварних феномена. На пример, ако x-оса означава време, онда $f(x)$ може означавати резултат неког мерења (температуре, ваздушног притиска итд) у временском тренутку x. Цртањем графика функције f, визуелно можемо закључити на којим интервалима је функција позитивна, негативна, затим где расте а где опада.

Ипак, некада нам није довољно само да знамо да ли функција расте или опада у околини неке тачке, већ нас занима и *колико брзо*. На Слици 1 дата је функција f, а занима нас колико брзо она расте у околини тачке x_0. Због тога желимо да уведемо нумерички показатељ, тј. број, који ће нам за то служити.



Слика 1: Први извод функције

Згодан начин за то јесте да кроз тачку $(x_0, f(x_0))$ поставимо тангенту на график.[1] Нагиб тангенте се тада може поистоветити са нагибом функције у тачки x_0. Уколико је α угао који тангента заклапа са позитивним делом x-осе, онда је смислено узети $\operatorname{tg}\alpha$ за индикатор нагиба: што је „позитивнији”, то функција у околини x_0 брже расте, а што је „негативнији”, то брже опада. Вредност нула значи да је функција у x_0 „равна”.

И даље није јасно како срачунати $\operatorname{tg}\alpha$. Оно што можемо урадити је померити се од тачке x_0 за Δx (које може бити и негативно, а на слици је позитивно), у тачку $x_0 + \Delta x$. Затим, кроз тачке $(x_0, f(x_0))$ и $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ провући праву, чији један део представља тетиву графика. Нека је θ угао који та тетива гради са позитивним делом x-осе. Јасно је да угао θ није једнак углу α који нас занима, али су блиски; штавише, када $\Delta x \to 0$, онда $\theta \to \alpha$.

Зато ћемо $\operatorname{tg}\alpha$ потражити као граничну вредност $\operatorname{tg}\theta$ када $\Delta x \to 0$. Са слике није тешко уочити да је $\operatorname{tg}\theta = \left(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\right)/\Delta x$, па смо онда спремни да дефинишемо ***први извод функције f у тачки x_0*** као:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Монотоност и локални екстремуми

Из претходне дискусије је јасно, уколико је функција f диференцијабилна, тј. има извод свуда где је дефинисана, да она расте на интервалима на којима је први извод позитиван, а опада на онима на којима је негативан. Уколико у тачки x_0 први извод мења знак, онда у тој тачки имамо *локални екстремум* (минимум или максимум).[2] Овиме ћемо се детаљније бавити у 13. вежбама где ћемо скицирати графике функција.

Изводи вишег реда, конвексност, и превојне тачке

Уколико је f диференцијабилна функција, онда она има први извод f', који је функција за себе, која може, или не мора имати први извод. Уколико њен први извод (дакле, извод извода) постоји, он се назива **други извод** функције f и означава као f'' (или, у тачки x, $f''(x)$). Слично се могу дефинисати и други, трећи, или n-ти извод f; последњи ћемо означавати $f^{(n)}(x)$.

Други извод је у блиској вези са појмом *конвексности* функције. Рећи ћемо да је функција *конвексна* на неком скупу, ако је њен график увек изнад своје тангенте, а да је *конкавна* уколико је испод.[3] Рецимо, функција дата на Слици 1 је *конкавна*.

Може се показати да, функција има други извод, онда је она конвексна тамо где је он позитиван, а конкавна тамо где је негативан. Тачка у којој функција мења конвексност зове се *превојна тачка*.

Правила рачуна

У наставку ћемо изложити неколико основних правила рачуна са изводима.

1. Извод је линеаран,[4] тј.

$$(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha f'(x) + \beta g'(x),$$

где су α и β реални бројеви, а f и g функције које имају извод у x.

[1] Наравно, прећутно претпостављамо да је то могуће урадити.

[2] Важно је нагласити да је тај екстремум локални; на пример, функција $x^4 - x^2 + 1$ (нацртати!) има локални максимум у тачки $x = 0$, али то није највећа вредност коју она може узети.

[3] Ово, наравно, није формална дефиниција, али за наше потребе је за сада довољна.

[4] Као последица овог, извод пролази и кроз разлику ($\alpha = 1$, $\beta = -1$), и множење скаларом $\beta = 0$. Дакле $(f - g)' = f' - g'$ и $(\alpha f)' = \alpha f'$.

2. Извод није мултипликативан, тј. не пролази кроз производ, већ се извод производа рачуна као:
$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$
3. Извод количника:
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$
4. Извод сложене функције:[5]
$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x).$$

Таблица извода

Изводи неких функција су довољно чести и потребни да се не изводе сваки пут рачунајући граничну вредност, већ се памте. За нас ће то бити:

- $c' = 0$, где је c константа;
- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, где је $\alpha \in \mathbb{R}$;
- $\sqrt{x}' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (спец. случај претходног);
- $(a^x)' = a^x \ln a$, где је $a > 0$;
- $(e^x)' = e^x$;
- $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;
- $(\sin x)' = \cos x$;
- $(\cos x)' = -\sin x$;
- $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
- $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
- $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
- $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
- $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;
- $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Лопиталова правила

Лопиталова[6] правила (или правило, зависи како се формулише) представљају начин на који изводи могу бити искоришћени у рачунању граничних вредности.

Теорема 1. *Нека су функције f и g дефинисане у пробушеној околини тачке $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, нека су диференцијабилне у тој околини и нека важи $g'(x) \neq 0$ за сва x у тој околини. Претпоставимо да важи један од следећих услова:*
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$$
или
$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = \lim_{x\to x_0} |g(x)| = \infty.$$
Ако постоји (коначна или бесконачна) гранична вредност
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$
онда постоји и гранична вредност
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Важно је нагласити да је Лопиталово правило дефинисано као импликација, а не као еквиваленција. Може се десити да гранична вредност количника извода не постоји, а да оригинална гранична вредност постоји.[7]

Задаци који се раде на вежбама

1. Одредити изводе следећих функција:
а) $f_1(x) = 5e^x + \cos x - 3$; б) $f_2(x) = x^3 \ln x$;
в) $f_3(x) = x \sin x + 2\ln 5$; г) $f_4(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{3x}$;
д) $f_5(x) = \sin x^2$; ђ) $f_6(x) = (\cos x)^2$;
е) $f_7(x) = \ln(\sin x + \cos x)$; ж) $f_8(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1-x}{1+x}$;
з) $f_9(x) = \sin(\ln \sqrt{x})$; и) $f_{10}(x) = \sin x \cdot \ln x \cdot \sqrt{x}$.

$$\begin{aligned}
f_1'(x) &= (5e^x)' + (\cos x)' - 3' = 5(e^x)' - \sin x - 0\\
&= 5e^x - \sin x,\\
f_2'(x) &= (x^3)' \ln x + x^3 (\ln x)' = 3x^2 \ln x + x^3 \frac{1}{x}\\
&= x^2(3\ln x + 1),\\
f_3'(x) &= x' \sin x + x(\sin x)' + 0 = \sin x + x\cos x,\\
f_4'(x) &= \frac{(\operatorname{arctg} x)' \cdot 3x - \operatorname{arctg} x \cdot (3x)'}{(3x)^2}\\
&= \frac{\frac{1}{1+x^2} \cdot \cancel{3}x - \operatorname{arctg} x \cdot \cancel{3}}{{}^{3}\,\cancel{9}x^2} = \frac{x - (1+x^2)\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)3x^2},\\
f_5'(x) &= (\sin x^2)' = \sin'(x^2) \cdot (x^2)' = \cos x^2 \cdot 2x\\
&= 2x\cos x^2,\\
f_6'(x) &= 2\cos x \cdot (\cos x)' = 2\cos x \cdot (-\sin x)\\
&= -2\sin x \cos x = -\sin 2x,\\
f_7'(x) &= \frac{1}{\sin x + \cos x} \cdot (\cos x - \sin x) = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x},\\
f_8'(x) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} \cdot \left(\frac{1-x}{1+x}\right)'\\
&= \frac{1}{1 + \frac{1-2x+x^2}{(1+x)^2}} \cdot \frac{(1-x)'(1+x) - (1-x)(1+x)'}{(1+x)^2}
\end{aligned}$$

[5] Овде углавном „запне”. Овом правилу посветите нарочиту пажњу.
[6] Guillaume François Antoine, Marquis de l'Hôpital (1661–1704), француски математичар
[7] Студенти се охрабрују да потраже контрапример.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\frac{1+2x+x^2+1-2x+x^2}{\cancel{(1+x)^2}}} \cdot \frac{-1\cdot(1+x)-(1-x)\cdot 1}{\cancel{(1+x)^2}} \\
&= \frac{-2}{2(1+x^2)} = -\frac{1}{1+x^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_9'(x) &= \cos(\ln\sqrt{x})\cdot(\ln\sqrt{x})' = \cos(\ln\sqrt{x})\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot(\sqrt{x})' \\
&= \cos(\ln\sqrt{x})\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\cos(\ln\sqrt{x})}{2x},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{10}'(x) &= (\sin x\cdot\ln x)'\cdot\sqrt{x} + (\sin x\cdot\ln x)\cdot(\sqrt{x})' \\
&= ((\sin x)'\ln x + \sin x\cdot(\ln x)')\sqrt{x} + \sin x\cdot\ln x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} \\
&= \left(\cos x\cdot\ln x + \frac{\sin x}{x}\right)\sqrt{x} + \frac{\sin x\cdot\ln x}{2\sqrt{x}}.
\end{aligned}$$

2. Испитати монотоност и одредити екстремне вредности функције:
а) $f(x) = (4-x)e^{-2/x}$; б) $g(x) = (x-2)^5$.

а) Функција f је диференцијабилна као композиција диференцијабилних функција, па монотоност можемо испитивати помоћу првог извода. За почетак, уочимо да је $D_f = (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Затим,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (4-x)'e^{-2/x} + (4-x)(e^{-2/x})' \\
&= -e^{-2/x} + (4-x)e^{-2/x}\left(-\frac{2}{x}\right)' \\
&= e^{-2/x}\left(-1+(4-x)\frac{2}{x^2}\right) \\
&= e^{-2/x}\frac{-x^2-2x+8}{x^2} \\
&= -e^{-2/x}\frac{(x+4)(x-2)}{x^2}.
\end{aligned}$$

За монотоност нам треба знак првог извода, који је најлакше одредити помоћу таблице:

	$-\infty$ … -4	-4 … 0	0 … 2	2 …
$-e^{-2/x}$	$-$	$-$	$-$	$-$
$x+4$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
x^2	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Видимо да функција f опада на интервалима $(-\infty,-4)$ и на $(2,\infty)$, а да расте на $(-4,0)$ и на[8] $(0,2)$.

У тачки $x=-4$ функција f има локални минимум[9] једнак $f(-4)=8\sqrt{e}$, док у тачки $x=2$ има локални максимум $f(2)=2/e$.

б) Имамо да је $f'(x) = 5(x-2)^4$. Видимо да је $f'(x)>0$ за све $x\neq 2$, и $f'(2)=0$. Дакле, функција f расте на целом скупу реалних бројева и нема локалних екстремума.[10]

3. Испитати конвексност и одредити превојне тачке функције

$$f(x) = (4-x)e^{-2/x}.$$

Функција је иста као у делу а) претходног задатка. Тамо смо срачунали да је

$$f'(x) = e^{-2/x}\frac{-x^2-2x+8}{x^2},$$

што је такође диференцијабилна функција, па конвексност испитујемо рачунањем другог извода. Имамо да је

$$\begin{aligned}
f''(x) &= e^{-2/x}\frac{2}{x^2}\frac{-x^2-2x+8}{x^2} \\
&\quad + e^{-2/x}\frac{(-2x-2)x^2-(-x^2-2x+8)2x}{x^4} \\
&= \frac{e^{-2/x}}{x^4}(-2x^2-4x+16-2x^3-2x^2+2x^3+4x^2-16x) \\
&= \frac{e^{-2/x}}{x^4}(-20x+16) \\
&= \frac{-4e^{-2/x}}{x^4}(5x-4).
\end{aligned}$$

Горњи израз није дефинисан у нули, а знак мења у $4/5$. Овај случај је доста једноставнији, па и без цртања табеле можемо закључити да је $f''(x)>0(-\infty,0)\cup(0,4/5)$ и $f''(x)<0$ на $(4/5,+\infty)$. Имамо и $f''(4/5)=0$. Дакле, f је конвексна на $(-\infty,0)$ и на $(0,4/5)$, а конкавна на $(4/5,+\infty)$. Функција има превој у $x=4/5$ и превојна тачка је $(4/5, f(4/5))$, то јест $\left(\frac{4}{5}, \frac{16}{5}e^{-5/2}\right)$.

4. Израчунати следеће граничне вредности:

а) $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^5}$;

в) $\lim\limits_{x\to0^+}x^7\ln x$; г) $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Задатак решавамо применом одговарајућих Лопиталових правила. Свуда у решењима ћемо писати „Л.П" изнад знака једнакости, да означимо да је на том месту примењено Лопиталово правило. Ту треба бити опрезан: оно важи само уколико гранична вредност количника извода̂ постоји. Тако да ту једнакост треба читати као „једнако уколико се испостави да оно с њене десне стране постоји".

а)

$$\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} \overset{0/0\ \text{Л.П.}}{=} \lim_{x\to5}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{1} = \frac{1}{4};$$

[8] Погрешно је рећи да f расте на $(-4,0)\cup(0,2)$. Наиме, функција расте на неком скупу A уколико за све $x,y\in A$, $x<y$ важи да је $f(x)\leq f(y)$. Али, $-1<1$ и $f(-1)=5e^2>3e^{-2}=f(1)$. Ово је честа студентска грешка.

[9] Није $x=-4$ локални минимум, већ тачка у којој се достиже локални минимум. Локални минимум (синоним: локална минимална вредност) јесте вредност функције у тој тачки. И ово је честа студентска грешка.

[10] Нацртати (користећи неки програм) график функције f и дискутовати шта се дешава у тачки $x=0$.

б)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^5}\overset{\infty/\infty\text{ Л.П.}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{5x^4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{5x^5}=0;$$

в)

$$\lim_{x\to0^+}x^7\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^7}}\overset{\infty/\infty\text{ Л.П.}}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-7x^6}{x^{14}}}$$
$$=\lim_{x\to0^+}\frac{x^{14}}{-7x^7}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^7}{-7}=0;$$

г)

$$\lim_{x\to1^+}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to1^+}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}$$
$$\overset{0/0\text{ Л.П.}}{=}\lim_{x\to1^+}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}}$$
$$=\lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}$$
$$\overset{0/0\text{ Л.П.}}{=}\lim_{x\to1^+}\frac{1}{\ln x+1+1}=\frac{1}{2};$$

д)

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}e^{\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2}}$$
$$\overset{0/0\text{ Л.П.}}{=}e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{x}{\sin x}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}}{2x}}$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^2\sin x}}$$
$$\overset{0/0\text{ Л.П.}}{=}e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{4x\sin x+2x^2\cos x}}$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-\sin x}{4\sin x+2x\cos x}}$$
$$\overset{0/0\text{ Л.П.}}{=}e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-\cos x}{4\cos x+2\cos x+2x\sin x}}$$
$$=e^{-1/6}.$$

5. Одредити вредност реалног параметра A тако да функција f буде непрекидна у нули, ако је:

$$f(x)=\begin{cases}\left(\frac{2^x+8^x}{2}\right)^{1/x}, & x\neq0,\\ A, & x=0.\end{cases}$$

По дефиницији непрекидности, параметар A мора бити једнак граничној вредности израза $\left(\frac{2^x+8^x}{2}\right)^{1/x}$ када $x\to0$. Зато рачунамо:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{2^x+8^x}{2}\right)^{1/x}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\frac{2^x+8^x}{2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\frac{2^x+8^x}{2}}{x}}$$
$$\overset{0/0\text{ Л.П.}}{=}e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{2}{2^x+8^x}\cdot\frac{1}{2}(2^x\ln2+8^x\ln8)}{1}}$$
$$=e^{\frac{2}{2}\cdot\frac{1}{2}(\ln2+\ln8)}=e^{\frac{1}{2}\ln16}=e^{\ln\sqrt{16}}=4.$$

Дакле, f је непрекидна у нули за $A=4$.

Додатни решени задаци

6. Израчунати следеће граничне вредности:

а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x-\operatorname{arctg}x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to1^+}\ln x\cdot\ln(x-1)$.

а)

$$\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x-\operatorname{arctg}x}{x^3}$$
$$\overset{0/0\text{ Л.П.}}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{1+x^2}}{3x^2}$$
$$\overset{0/0\text{ Л.П.}}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}+\frac{2x}{(1+x^2)^2}}{6x}=\frac{1}{2}.$$

б)

$$\lim_{x\to1}\ln x\ln(x-1)=\lim_{x\to1}\frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}}$$
$$\overset{\infty/\infty\text{ Л.П.}}{=}\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{-1}{x\ln^2x}}=\lim_{x\to1}\frac{-x\ln^2x}{x-1}$$
$$\overset{0/0\text{ Л.П.}}{=}\lim_{x\to1}\frac{-\ln^2x-2x\ln x\cdot\frac{1}{x}}{1}=0$$

7. Испитати монотоност и конвексност функције f, одредити њене локалне екстремуме и превојне тачке, ако је

$$f(x)=\frac{x+1}{x+2}\cdot e^x.$$

За почетак, да пронађемо домен функције. Мора бити $x+2\neq0$, тако да добијамо да је $D_f=(-\infty,-2)\cup(-2,\infty)$. Сада испитујемо монотоност и конвексност.

Монотоност и локални екстремуми. Рачунамо први извод:

$$f'(x)=\left(\frac{x+1}{x+2}\right)'e^x+\frac{x+1}{x+2}(e^x)'$$
$$=\frac{1\cdot(x+2)-1\cdot(x+1)}{(x+2)^2}e^x+\frac{x+1}{x+2}e^x$$
$$=\frac{1}{(x+2)^2}e^x+\frac{(x+1)(x+2)}{(x+2)^2}e^x$$
$$=\frac{x^2+3x+3}{(x+2)^2}e^x.$$

Можемо уочити да је $f'(x)>0$ за све $x\in D_f$, па функција f расте на $(-\infty,-2)$, као и на $(-2,+\infty)$. Функција нема локалних екстремума.

Конвексност и превојне тачке. Имамо да је

$$f''(x)=\left(\frac{x^2+3x+3}{(x+2)^2}\right)'e^x+\frac{x^2+3x+3}{(x+2)^2}e^x$$

$$= \left(\frac{(2x+3)(x+2)^2 - 2(x+2)(x^2+3x+3)}{(x+2)^4} + \frac{x^2+3x+3}{(x+2)^2} \right) e^x$$
$$= \left(\frac{2x^2+4x+3x+6-2x^2-6x-6}{(x+2)^3} + \frac{(x+2)(x^2+3x+3)}{(x+2)^3} \right) e^x$$
$$= \left(\frac{x}{(x+2)^3} + \frac{x^3+5x^2+9x+6}{(x+2)^3} \right) e^x = \frac{x^3+5x^2+10x+6}{(x+2)^3} e^x$$
$$= \frac{(x+1)(x^2+4x+6)}{(x+2)^2} e^x.$$

Имамо табелу:

	$-\infty$	-2	-1
$(x^2+4x+6)e^x$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$
$(x+2)^3$	$-$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
f	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Дакле, f је конвексна на $(-\infty, -2)$ и на $(-1, \infty)$, а конкавна је на $(-2, -1)$. Функција се превија у $x = -1$ и $f(-1) = 0$.

Задаци за самосталан рад

8. Израчунати следеће граничне вредности:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \left(1 + 3\operatorname{tg}^2 x\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2}{x^2} - \dfrac{\sin 2x}{x^3} \right)$.

9. Испитати монотоност и конвексност функције f, одредити њене локалне екстремуме и превојне тачке, ако је

а) $f(x) = \dfrac{x+1}{x} \cdot e^{-x}$; б) $f(x) = (x+2)e^{1/x}$.