Данијел Г. Алексић, асистент

Теоријске основе

У наставку је кратак преглед знања које је неопходно за решавање задатака који следе. Он никако није замена за предавања.

Гранична вредност функције

Нека је дата функција[1] $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ и нека је $x_0 \in (a, b)$. Кажемо да је реалан број L **гранична вредност** функције f у тачки x_0, у ознаци $L = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, уколико важи да

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)$$
$$x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta) \implies f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon).$$

Заправо, овде одговарамо на питање: Ако се x приближава x_0, чему се приближава $f(x)$?

На сличан начин могу се дефинисати и лева и десна гранична вредност. Рећи ћемо да је $L_- \in \mathbb{R}$ лева гранична вредност (гранична вредност слева) функције f уколико важи да

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\, x \in (x_0 - \delta, x_0) \implies f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon).$$

Аналогно се дефинише и десна гранична вредност, као и појам бесконачне граничне вредности, и граничне вредности у бесконачности.[2]

Непрекидност функције

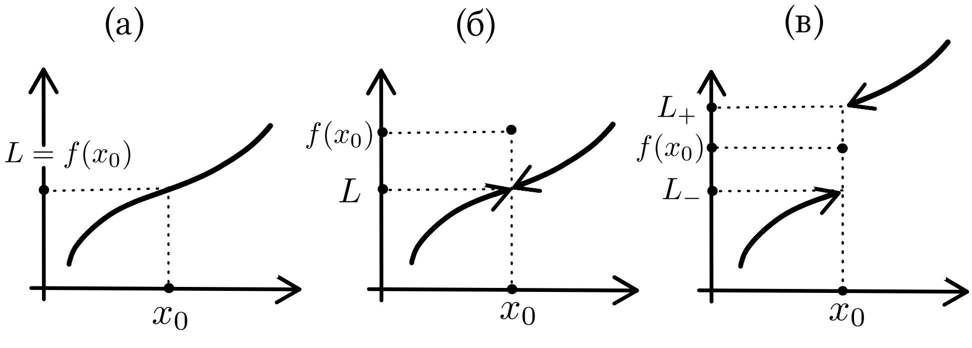
Уколико функција има граничну вредност у некој тачки и та гранична вредност се поклапа са вредношћу те функције у тој тачки, кажемо да је она *непрекидна* у њој. Прецизније, кажемо да је f непрекидна у x_0 уколико је

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Функција f је *непрекидна* (без помињања тачке) уколико је непрекидна у свакој тачки у којој је дефинисана. Оваква дефиниција одговара интуитивном поимању непрекидности, тј. да је функција непрекидна уколико се њен график може нацртати „без подизања оловке са папира”. Слика 1 илуструје могуће ситуације.

Композиција непрекидних функција је непрекидна функција, као и њихов збир, разлика, производ и количник (онде где је дефинисан). Непрекидна је већина функција са којима смо се у досадашњем школовању срели: полиноми, степене функције, експоненцијална функција, логаритамска функција, тригонометријске и инверзне тригонометријске функције итд.

Такође, ако је f непрекидна функција, онда је $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = f(\lim\limits_{x \to x_0} g(x))$, тј. гранична вредност „пролази” кроз непрекидну функцију.



Слика 1: (а): функција која је непрекидна у x_0; (б): функција која је прекидна у x_0, али има граничну вредност у x_0; (в): функција која је прекидна у x_0 и нема граничну вредност у x_0.

Асимптоте функције

Уколико нека функција f није дефинисана у тачки x_0, али у тој тачки има бесконачну граничну вредност (с једне или с обе стране), рећи ћемо да је права $x = x_0$ *вертикална асимптота* функције f (с једне или с обе стране). Типичан пример јесте функција $f(x) = 1/x$ са вертикалном асимптотом $x = 0$.

Уколико је $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$, кажемо да је права $y = L$ *хоризонтална асимптота* функције f кад $x \to +\infty$. Слично се дефинише и хоризонтална асимптота функције f при $x \to -\infty$.

Уколико је $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (kx + n))$, кажемо да је права $y = kx + n$ *коса асимптота* функције f кад $x \to +\infty$. Уколико она постоји, можемо је наћи помо-

[1] Није нужно да домен функције буде интервал, јер ће нас занимати само њено понашање у околини тачке x_0.

[2] Овде само на брзину „летимо” преко појмова који нам требају за задатке. Дефинитивно препоручујемо да се прво савлада теорија, па да се раде задаци.

ђу релација

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad n = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx).$$

Слично је дефинишемо и проналазимо и при $x \to -\infty$.

Табличне граничне вредности

Неке граничне вредности се довољно често појављују у рачуну да бисмо их памтили, уместо да их сваки пут рачунамо по дефиницији. За њих ћемо рећи да су *табличне*. За нас ће то бити:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1;$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a;$$
$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e; \qquad \lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Смена променљиве

За почетак, размотримо идеју на примеру. Управо смо научили да је

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Али, може нам затребати и гранична вредност

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x^2}.$$

Размишљамо на следећи начин. Ако x тежи нули, онда и x^2 тежи нули, а важи и обрнуто. Другим речима, x тежи нули ако и само ако x^2 тежи нули, па се горња гранична вредност може записати и као

$$\lim_{x^2\to 0} \frac{\sin x^2}{x^2},$$

а, да се не бисмо збунили, можемо увести и нову ознаку $t = x^2$, па нашу граничну вредности писати као

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t},$$

чија је вредност једнака 1, јер је ово таблична гранична вредност; једина разлика је што смо за аргумент овде користили t, а у таблици x што је, наравно, неважно.

Затим, може нам затребати и гранична вредност

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1}.$$

Уочавамо сличну правилност: x тежи ка 1 ако и само ако $t := x - 1$ тежи ка нули, па се опет позивамо на таблицу и рачунамо да је горња гранична вредност једнака 1.

У општем случају, имаћемо граничну вредност

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x))$$

где ће, углавном, g бити непрекидна и бијективна функција[3], па ће важити да $x \to x_0$ ако и само ако $t := g(x) \to g(x_0) =: t_0$, па се може увести *смена* $t = g(x)$ и добити да је

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim_{t\to t_0} f(t).$$

Задатак 5 ће илустровати ову процедуру.

Задаци који се раде на вежбама

1. Израчунати следеће граничне вредности:

а) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^3+x}{2x-1}$; б) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

в) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2+7x}{2x^2+3x}$; г) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

а) Овај задатак је „за загревање”. Функција унутар лимеса је добро дефинисана у тачки $x_0 = 2$, а у њој је и непрекидна, као количник две непрекидне функције (полинома). Зато просто можемо уврстити вредност $x_0 = 2$ у функцију и израчунати да је:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3+x}{2x-1} = \frac{2^3+2}{2\cdot 2-1} = \frac{10}{3}.$$

б) У овом случају функција није дефинисана у тачки 1 и гранична вредност је облика „0/0”, тј. и бројилац и именилац теже нули. Ипак, то не значи да гранична вредност не постоји. Штавише, овде можемо срачунати да је

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{2\cancel{(x-1)}(x+1/2)}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x+1/2} = \frac{2}{3}.$$

Овај задатак приказује једно кључно својство граничне вредности, а то је да она описује понашање функције у тзв. *пробушеној околини*[4] тачке у којој се рачуна; другим речима, сама вредност функције у тачки небитна је за граничну вредност у тој тачки, јер дефиниција граничне вредности од ње не зависи.

в) Поучени претходним задатком, знамо шта треба да радимо, па рачунамо да је:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+7x}{2x^2+3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(x+7)}{\cancel{x}(2x+3)} = \frac{0+7}{2\cdot 0+3} = \frac{7}{3}.$$

г) Поново се налазимо у ситуацији у којој и бројилац и именилац теже нули, па ћемо опет покушати да трансформишемо израз. Имамо да је

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)-1}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}$$

[3] Студент који не зна шта је бијекција треба овде да престане са читањем овог штива, научи шта је бијекција, врати се и настави.

[4] Некој околини тачке, без те тачке. За детаље консултовати уџбеник.

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+x}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}.$$

2. Одредити домен и вертикалне асимптоте функције:

а) $f(x) = \dfrac{x^2+x-5}{3-x}$; б) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-9}$.

а) Именилац не сме бити једнак нули, односно $3-x \neq 0$, па закључујемо да је домен функције f скуп $D_f = (-\infty, 3)\cup(3,+\infty)$. Сада је јасно да има смисла тражити вертикалну асимптоту у тачки $x_0 = 3$, јер се у њој домен „прекида”. Имамо да је

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{x^2+x-5}{3-x} = \frac{3^2+3-5}{0^+}$$

$$= \frac{7}{0^+} = +\infty.$$

Овде смо мало злоупотребили ознаке, па је ред да појаснимо. Када напишемо $x \to 3^-$, подразумевамо да x тежи ка 3 *слева*, тј. x се све више и више приближава броју 3, али увек је мањи од 3. Зато је разлика $3-x$ увек већа од 0, али тежи нули. Ту граничну вредност записујемо као 0^+. Бројилац тежи броју 7. Када спојимо те две чињенице, наша гранична вредност постаје „нешто што тежи ка 7 кроз нешто што тежи нули одозго”. Таква гранична вредност једнака је $+\infty$, јер би се погодном сменом свела на $\lim_{t\to 0^+} 1/t$, што је $+\infty$. Сасвим слично је и

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \frac{7}{0^-} = -\infty.$$

Дакле, права $x = 3$ је вертикална асимптота функције f *с обе стране*.

б) Овде је

$$f(x) = \frac{1}{(x-3)(x+3)},$$

па је јасно да је $D_f = (-\infty,-3)\cup(-3,3)\cup(3,+\infty)$. Зато су кандидати за вертикалне асимптоте праве $x=-3$ и $x=3$. Имамо да је

$$\lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^-} \frac{1}{(x-3)(x+3)}$$

$$= \frac{1}{-6\cdot 0^-} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

и

$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+} \frac{1}{(x-3)(x+3)}$$

$$= \frac{1}{-6\cdot 0^+} = \frac{1}{0^-} = -\infty,$$

па је права $x=-3$ обострана вертикална асимптота функције f. Слично је и

$$\lim_{x\to 3-} f(x) = \frac{1}{0^-\cdot 6} = -\infty$$

и

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \frac{1}{0^+\cdot 6} = +\infty,$$

па је и права $x=3$ обострана вертикална асимптота функције f.

3. Одредити хоризонталне асимптоте функције:

а) $f(x) = \dfrac{-3x^3+x+1}{3x^3+x^2+1}$; б) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

а) Овде није неопходно потпуно одредити домен функције f, јер нам је за постојање хоризонталне асимптоте довољно да је функција дефинисана на некој околини одговарајуће бесконачности. Како је именилац у функцији f полином трећег степена, он има највише три реалне нуле, па смо сигурни да је наша функција дефинисана на скупу реалних бројева, осим, можда, у три тачке. То је, свакако, довољно да констатујемо да *има смисла* тражити граничну вредност функције f при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$. Овде ће рачун бити исти за обе бесконачности, па ћемо обе граничне вредности рачунати заједно:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3x^3+x+1}{3x^3+x^2+1}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^3}\left(-3+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{\cancel{x^3}\left(3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}$$

$$= \frac{-3+0+0}{3+0+0} = -1.$$

Дакле, права $y=-1$ је хоризонтална асимптота функције f и кад $x\to+\infty$ и кад $x\to-\infty$.

И за функције важи слично правило као и за низове: уколико су бројилац и именилац полиноми истог степена, гранична вредност у бесконачности једнака је количнику водећих коефицијената (коефицијената уз највећи степен променљиве x).

б) Прво ћемо се подсетити да није тачно да је $\sqrt{x^2} = x$ за произвољно реално x, већ да је, у општем случају, $\sqrt{x^2} = |x|$. Зато је

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \frac{|x|}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}.$$

Јасно је да корен у горњем изразу тежи броју 1 било да x тежи ка $+\infty$, било ка $-\infty$. С друге стране, количник $|x|/x$ ће евентуално постати 1 кад $x\to+\infty$, а -1 кад $x\to-\infty$, по дефиницији апсолутне вредности. Дакле,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -1.$$

Другим речима, права $y=1$ је хоризонтална асимптота функције f кад $x\to+\infty$, док је права $y=-1$ хоризонтална асимптота f кад $x\to-\infty$.

4. Одредити домен и косе асимптоте функције $f(x)=\sqrt{x^2+x}$.

Да би функција f била добро дефинисана, мора бити $x^2+x\geq 0$, односно $x(x+1)\geq 0$, па је $D_f=(-\infty,-1)\cup(0,\infty)$. Како је функција дефинисана на околинама обе бесконачности, има смисла тражити косе асимптоте у оба случаја. Прво ћемо разматрати $+\infty$. Имамо да је

$$\begin{aligned}k_{+\infty}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{x}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\cancel{x}}=1,\end{aligned}$$

односно

$$\begin{aligned}n_{+\infty}&=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-k_{+\infty}\cdot x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}\\&=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Дакле, права $y=k_{+\infty}x+n_{+\infty}=x+1/2$ је коса асимптота функције f кад $x\to+\infty$. Слично је

$$\begin{aligned}k_{-\infty}&=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{x}\\&=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\cancel{x}}=-1\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}n_{-\infty}&=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-k_{-\infty}\cdot x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)\\&=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}}{-\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}\\&=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Следи да је права $y=-x-1/2$ коса асимптота функције f при $x\to-\infty$.

5. Израчунати следеће граничне вредности:

а) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{\sin 7x}$; б) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$;

в) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-4}\right)^{\frac{x+1}{3}}$; г) $\displaystyle\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$;

д) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos x)}{\sqrt[4]{1+x^2}-1}$.

У овом задатку примењујемо табличне граничне вредности, а прећутно користимо и смену променљиве коју смо дискутовали у теоријском уводу.

а)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{\sin 7x}&=\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5x\cdot\frac{1}{\frac{\sin 7x}{7x}\cdot 7x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin 5x}{5x}}{\frac{\sin 7x}{7x}}\cdot\frac{5}{7}=\frac{5}{7}.\end{aligned}$$

б)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}&=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x}\\&=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x}\\&=1^2\cdot\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

в)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\left(\frac{3x+2}{3x-4}\right)^{\frac{x+1}{3}}&=\lim_{x\to0}\left(\frac{3x-4+6}{3x-4}\right)^{\frac{x+1}{3}}\\&=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{1}{\frac{3x-4}{6}}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{3x-4+6}{3x-4}\right)^{\frac{x+1}{3}}\\&=\lim_{x\to0}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{3x-4}{6}}\right)^{\frac{3x-4}{6}}\right)^{\frac{{}^{2}\cancel{6}}{3x-4}\cdot\frac{x+1}{\cancel{3}}}\\&=\lim_{x\to0}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{3x-4}{6}}\right)^{\frac{3x-4}{6}}\right)^{\frac{2x+2}{3x-9}}\\&=e^{2/3}.\end{aligned}$$

г) Овде се треба сетити да су експоненцијална и логаритамска функција једна другој инверзне, односно да је $\ln e^x=e^{\ln x}=x$. Знајући ово, рачунамо да је

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}&=\lim_{x\to0}e^{\ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}}\\&=\lim_{x\to0}e^{\frac{\ln(\cos x)}{x^2}}\\&=\lim_{x\to0}e^{\frac{\ln(1+(\cos x-1))}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}}\\&=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+(\cos x-1))}{\cos x-1}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}}\end{aligned}$$

$$= e^{1\cdot(-1/2)} = e^{-1/2},$$

где је прва гранична вредност таблична (уз прећутну смену $t = \cos x - 1$), а друга је срачуната у делу б) задатка.

д) Поново ћемо се позвати како на табличне, тако и на претходно срачунате граничне вредности:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{\sqrt[4]{1+x^2}-1}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+(\cos x-1))}{\cos x - 1}\frac{\cos x - 1}{x^2}\frac{1}{\frac{(1+x^2)^{1/4}-1}{x^2}}$$
$$= 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{\frac{1}{4}} = -2.$$

6. Нека је функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ дефинисана као

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x<0,\\ x+A, & x\geq 0.\end{cases}$$

Одредити вредност реалног параметра A тако да функција f буде непрекидна на скупу реалних бројева.

За почетак, констатујемо да је f непрекидна у свакој тачки $x\neq 0$, јер су и e^x и $x+A$ непрекидне функције. Остаје још да „ручно” проверимо нулу, јер у тој тачки функција мења правило којим је дефинисана. Јасно је да је $f(0) = 0 + A = A$. Затим рачунамо леву и десну граничну вредност у нули. Имамо да је

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^x = e^0 = 1$$

и

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x+A) = 0 + A = A.$$

Да би f била непрекидна (а већ имамо да је непрекидна свуда осим можда у нули), мора бити непрекидна у нули, односно у нули се морају поклопити вредност функције, лева и десна гранична вредност. Другим речима, f је непрекидна за $A = 1$.

Напомена. Овакви задаци су чести на испиту, при чему су граничне вредности које у њима фигуришу теже за израчунавање, и захтевају познавање техника које смо до сада приказали, и које ћемо у наставку приказати. Ако знамо дефиницију непрекидности, задатак који захтева испитивање непрекидности и онај који захтева израчунавање граничне вредности су практично исти задатак.

7. Испитати непрекидност функције

$$f(x) = \begin{cases} x, & x\leq 2,\\ 3, & 2<x\leq 3,\\ \dfrac{x^2}{3}, & x>3.\end{cases}$$

Функција f је непрекидна свуда осим можда у тачкама 2 и 3, јер је задата као полином, односно константна функција, које су непрекидне. Даље имамо да је $f(2) = 2$, као и

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x = 2,$$

док је

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} 3 = 3,$$

па је f прекидна у тачки $x = 2$. С друге стране је $f(3) = 3$, док је

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} 3 = 3$$

и

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+}\frac{x^2}{3} = \frac{3^2}{3} = 3,$$

па је f непрекидна у $x = 3$. Другим речима, f је непрекидна свуда осим у $x = 2$.

Додатни решени задаци

8. Израчунати $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}{x}$.

Овај задатак захтева малу довитљивост у „намештању” израза унутар граничне вредности.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)-(\sqrt[3]{x+1}-1)}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)}{x} - \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[3]{x+1}-1)}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)}{x}\cdot\frac{(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}+1)}$$
$$- \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[3]{x+1}-1)}{x}\cdot\frac{\left((\sqrt[3]{x+1})^2+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}{\left((\sqrt[3]{x+1})^2+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+1})^2-1^2}{x(\sqrt{x+1}+1)} - \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[3]{x+1})^3-1^3}{x(\sqrt[3]{x+1})^2+\sqrt[3]{x+1}+1}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{x+1}+1)} - \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left((\sqrt[3]{x+1})^2+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}$$
$$= \frac{1}{2}-\frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

9. Израчунати $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x+2}{x^2-5x+4}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+2}{x^2-5x+4}-\frac{1}{x^2-3x+2}\right)$$
$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{x+2}{x^2-5x+4}-\frac{1}{x^2-3x+2}\right)$$
$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{x+2}{(x-1)(x-4)}-\frac{1}{(x-1)(x-2)}\right)$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{x^2-4-(x-4)}{(x-1)(x-2)(x-4)} = \lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{(x-1)(x-2)(x-4)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x}{(x-2)(x-4)} = \frac{1}{3}.$$

10. Израчунати $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{2x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{2x}\right)$.

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{2x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{2x}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{2x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{2x}\right) \frac{\sqrt{2x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{2x}}{\sqrt{2x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{2x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+\sqrt{x+\sqrt{x}}-2x}{\sqrt{2x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{2x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{2x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{2x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{2+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}}}+\sqrt{2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\left(\sqrt{2+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}}}+\sqrt{2}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Задаци за самосталан рад

11. Израчунати $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^{x^2}-e^{x^2}}{1-\cos 2x}$.

12. Израчунати $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[4]{1-\sin 2x\cdot \operatorname{tg} 3x}-1}{\ln(1+5x^2)}$.

13. Израчунати $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{1+\frac{4}{x}}-\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}}{1-\sqrt{1+\frac{5}{x}}}$.