Тачке нагомилавања низова — **Дуња Прокић, сарадник у настави**

Теоријске основе

У наставку је кратак преглед знања које је неопходно за решавање задатака који следе. Он никако није замена за предавања.

Тачка $a \in \mathbb{R}$ је тачка нагомилавања низа $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ако свака околина те тачке садржи бесконачно много чланова тог низа.

Заправо, на основу претходног јасно је да је тачка нагомилавања гранична вредност неког подниза посматраног низа.

Низ је конвергентан акко има тачно једну тачку нагомилавања.

Задаци који се раде на вежбама

> **1.** Одредити тачке нагомилавања низа $a_n = (\frac{2n+3}{2n+1})^n + A\cdot \sin\frac{n\pi}{2}, A\in\mathbb{R}$. Одредити вредност параметра A тако да низ (a_n) конвергира.

Нека је $b_n = (\frac{2n+3}{2n+1})^n$ и $c_n = \sin\frac{n\pi}{2}$. Тада је $a_n = b_n + A\cdot c_n$. Из једног од претходних задатака, знамо да низ (b_n) конвергира и његова гранична вредност је $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = e$. Што се тиче низа (c_n), директном заменом можемо видети како он изгледа: $c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = -1, c_4 = 0, c_5 = 1, c_6 = 0, c_7 = -1, c_8 = 0, \ldots$ Дакле, уочавамо да се вредности у низу (c_n) понављају са периодом 4. Управо нам тај период понављања говори које поднизове низа (c_n) ћемо уочити:

$$c_n = \begin{cases} 0 & n = 4k \\ 1 & n = 4k+1 \\ 0 & n = 4k+2 \\ -1 & n = 4k+3 \end{cases}, k\in\mathbb{N}_0$$

На основу претходног, можемо формирати следећу табелу у којој приказујемо вредности ка којима конвергију уочени поднизови.

n	$\lim\limits_{n\to\infty} b_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} c_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$
$4k$	e	0	e
$4k+1$	e	1	$e+1$
$4k+2$	e	0	e
$4k+3$	e	-1	$e-1$

Тачке нагомилавања низа a_n су:

$$T_n = \{e - A, e, e + A\}$$

Како је низ конвергентан акко има тачно једну тачку нагомилавања, следи да тада мора важити да је $e - A = A = e + A$, тј. за $A = 0$, низ конвергира.

> **2.** Одредити тачке нагомилавања низа $a_n = \frac{(1+(-1)^n)n^2+n}{3n^2-1} + \cos\frac{2n\pi}{3}$.

Означимо са $b_n = \frac{(1+(-1)^n)n^2+n}{3n^2-1}$ и са $c_n = \cos\frac{2n\pi}{3}$.

У општем члану низа b_n се појављује $(-1)^n$, за који знамо да узима или вредност 1 или -1 у зависности од тога да ли је n парно или непарно. Зато, уочавамо подниз низа b_n елемената са парним индексима и са непарним индексима.

$$n = 2k: \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n}{3n^2-1} = \frac{2}{3}.$$

$$n = 2k+1: \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n^2-1} = 0.$$

Како у низу c_n фигурише периодична функција, желимо да одредимо који ће бити период понављања елемената у низу c_n. Видимо да је: $c_1 = -\frac{1}{2}, c_2 = -\frac{1}{2}, c_3 = 1, c_4 = -\frac{1}{2}, c_5 = -\frac{1}{2}, c_6 = 1, \ldots$ Дакле:

$$c_n = \begin{cases} 1 & n = 3k \\ -\frac{1}{2} & n = 3k+1 \\ -\frac{1}{2} & n = 3k+2 \end{cases}, k\in\mathbb{N}_0$$

Како је период понављања елемената у низу b_n 2, а у низу c_n 3, следи да пошто је $a_n = b_n + c_n$, период понављања елемената у низу a_n је $6 = \text{НЗС}(2,3)$.

n	$\lim\limits_{n\to\infty} b_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} c_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$
$6k$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{5}{3}$
$6k+1$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$6k+2$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
$6k+3$	0	1	1
$6k+4$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
$6k+5$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Коначно, скуп тачака нагомилавања низа a_n је $T_n = \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 1, \frac{5}{3}\}$.

> **3.** Одредити вредност реалног параметра M тако да низ чији је општи члан $a_n = \frac{2+4n^{-2}}{3+6n^{2(-1)^n}} + M\cdot\frac{1+(-1)^n}{2}$.

Уочавамо два подниза посматраног низа a_n: подниз елемената на парним индексима и подниз елемената на непарним индексима. Када је $n = 2k$, имамо да је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+\frac{4}{n^2}}{3+6n^2} + M = M$,док у случају када је $n = 2k+1$, важи $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+\frac{4}{n^2}}{3+\frac{6}{n^2}} = \frac{2}{3}$.

Дакле, тачке нагомилавања низа a_n су M и $\frac{2}{3}$, а да би низ конвергирао, мора постојати јединствена тачка нагомилавања, па мора важити да је $M = \frac{2}{3}$.

Додатни решени задаци

> **4.** Одредити тачке нагомилавања низа $a_n = (1+(-1)^n)\sin\frac{2n\pi}{3}, n\in\mathbb{N}$.

У оквиру општег члана низа a_n видимо да фигуришу чланови $(-1)^n$ и $\sin\frac{2n\pi}{3}$ и зато нека су $b_n = 1+(-1)^n$ и $c_n = \sin\frac{2n\pi}{3}$.

Уочавамо поднизове:

$$b_n = \begin{cases} 2, & n = 2k \\ 0, & n = 2k+1 \end{cases}$$

и

$$c_n = \begin{cases} 0, & n = 3k \\ \frac{\sqrt{3}}{2}, & n = 3k+1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}, & n = 3k+2 \end{cases}$$

Дакле, можемо формирати следећу табелу:

n	$\lim\limits_{n\to\infty} b_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} c_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$
$6k$	2	0	0
$6k+1$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
$6k+2$	2	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\sqrt{3}$
$6k+3$	0	0	0
$6k+4$	2	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
$6k+5$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0

Тачке нагомилавања низа a_n су $T_n = \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$.

5. Одредити тачке нагомилавања низа чији је општи члан дат са:

$$a_n = \frac{2^{n+1}+3\cdot 5^{n+1}}{2^n+2\cdot 5^n} + \frac{2n^3+2n-1}{n^3-2}\cdot \sin\frac{n\pi}{4}, n \in \mathbb{N}.$$

Нека су $b_n = \frac{2^{n+1}+3\cdot 5^{n+1}}{2^n+2\cdot 5^n}$, $c_n = \frac{2n^3+2n-1}{n^3-2}$ и $d_n = \sin\frac{n\pi}{4}$, тада је $a_n = b_n + c_n \cdot d_n$.

Низови b_n и c_n су конвергентни и њихове граничне вредности су:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}((\frac{2}{5})^{n+1}+3)}{5^n((\frac{2}{5})^n+2)} = \frac{15}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 2.$$

Исписивањем вредности низа d_n, уочавамо следеће поднизове:

$$d_n = \begin{cases} 0, & n = 8k \\ \frac{\sqrt{2}}{2}, & n = 8k+1 \\ 1, & n = 8k+2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}, & n = 8k+3 \\ 0, & n = 8k+4 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}, & n = 8k+5 \\ -1, & n = 8k+6 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}, & n = 8k+7 \end{cases}$$

Дакле, имамо:

n	$\lim\limits_{n\to\infty} b_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} c_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} d_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$
$8k$	$\frac{15}{2}$	2	0	$\frac{15}{2}$
$8k+1$	$\frac{15}{2}$	2	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{15}{2}+\sqrt{2}$
$8k+2$	$\frac{15}{2}$	2	1	$\frac{15}{2}+2$
$8k+3$	$\frac{15}{2}$	2	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{15}{2}+\sqrt{2}$
$8k+4$	$\frac{15}{2}$	2	0	$\frac{15}{2}$
$8k+5$	$\frac{15}{2}$	2	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{15}{2}-\sqrt{2}$
$8k+6$	$\frac{15}{2}$	2	-1	$\frac{15}{2}-2$
$8k+7$	$\frac{15}{2}$	2	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{15}{2}-\sqrt{2}$

Коначно, тачке нагомилавања низа a_n су $T_n = \{\frac{15}{2}, \frac{15}{2}+\sqrt{2}, \frac{15}{2}-\sqrt{2}, \frac{15}{2}+2, \frac{15}{2}-2\}$.

Задаци за самосталан рад

6. Одредити тачке нагомилавања низа $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ чији је општи члан $a_n = (\frac{1+2n^{(-1)^n}}{1+3n^{(-1)^n}})\sin\frac{2n\pi}{3} + \frac{2^n+7^{n+1}}{2^{n+1}+5\cdot 7^n}, n \in \mathbb{N}$.

7. Одредити тачке нагомилавања низа $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ чији је општи члан $a_n = \frac{(1+(-1)^n)n^2-n+3}{n^2+2n-1} + (\frac{n^2-n+3}{n^2+2n-1})^{4n-3}, n \in \mathbb{N}$.

8. Одредити тачке нагомилавања низа $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ чији је општи члан $a_n = (\frac{n(3n-1)-(-1)^n}{3n^2-n-1})^{5n^2+\sin\frac{n\pi}{2}} + \frac{3\cdot 5^{n+1}-5\cdot 3^{n+1}}{5^n+3^n} \cdot \cos\frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{N}$.