Теоријске основе

Низ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ је функција која је дефинисана на скупу природних бројева $\mathbb{N}$. Нас ће искључиво занимати низови реалних бројева, што би била функција $a : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$. Вредност $a(n) := a_n$ називамо општим чланом низа. Уколико знамо како је дефинисан општи члан низа a_n, знамо како изгледа сваки члан тог низа.

Јасно је да низ има бесконачно пребројиво много чланова, али скуп вредности чланова низа може бити коначан. На пример, ако је општи члан низа задат као $a_n = (-1)^n$, његов скуп вредности је $-1, 1$.

Ако постоји коначан број $a \in \mathbb{R}$ тако да важи:

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})n > n_0 \implies |a_n - a| < \epsilon,$$

онда кажемо да је a гранична вредност низа $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Тада за низ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ кажемо да је конвергентан. У супротном, кажемо да је низ дивергентан.

Конвергентан низ има **тачно једну** граничну вредност.

Наредне граничне вредности ћемо користити као познате:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & -1 < q < 1 \\ 1 & q = 1 \\ +\infty & q > 1 \\ \text{не постоји} & q \le -1 \end{cases} \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{f(n)}\right)^{f(n)} = e \tag{3}$$

где важи $f(n) \to \infty$ када $n \to \infty$.

Теорема о три низа

Теорема 1. *Нека је дат низ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ за који желимо да нађемо граничну вредност. Уколико постоје низови $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ тако да важи $b_n \le a_n \le c_n$, $\forall n > n_0$ и важи $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$, тада је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.*

Задаци који се раде на вежбама

1. Одредити следеће граничне вредности:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+3}{5n+1}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+5n-1}{2n+7}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+2}{n^2-n-1}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} (\dfrac{2n+5}{3n-2})^3$

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+3}{5n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(1+\frac{3}{n})}{5n(1+\frac{1}{5n})} = \dfrac{1}{5}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+5n-1}{2n+7} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2(1+\frac{5}{n}-\frac{1}{n^2})}{2n(1+\frac{7}{2n})} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2} = \infty$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+2}{n^2-n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n(1+\frac{1}{n})}{n^2(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n} = 0$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} (\dfrac{2n+5}{3n-2})^3 = \lim\limits_{n\to\infty} (\dfrac{2n(1+\frac{5}{2n})}{3n(1-\frac{2}{3n})})^3 = \dfrac{8}{27}$

2. Израчунати граничну вредности $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$.

У овом задатку желимо да искористимо граничну вредност (1). Поставља се питање шта је погодно извући као заједнички чинилац у бројиоцу и имениоцу: $(-2)^n$ или 3^n.

Пробајмо прво да извучемо $(-2)^n$:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^n\left(1 + (-\frac{3}{2})^n\right)}{(-2)^{n+1}\left(1 + (-\frac{3}{2})^{n+1}\right)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1 + (-\frac{3}{2})^n}{-2\left(1 + (-\frac{3}{2})^{n+1}\right)}.\end{aligned}$$

Приметимо да уколико пустимо граничну вредност у овом тренутку, према (1), гранична вредност од $(-\frac{3}{2})^n$ када $n \to \infty$ не постоји.

Зато, тражену граничну вредност ћемо одредити на следећи начин:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{3^n\left((-\frac{2}{3})^n + 1\right)}{3^{n+1}\left((-\frac{2}{3})^{n+1} + 1\right)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{(-\frac{2}{3})^n + 1}{(-\frac{2}{3})^{n+1} + 1} \\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

3. Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, уколико је $a_n = \sqrt{n^2+n} - n$.

Приметимо да је $a_n = \sqrt{n^2+n} - n = n(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1)$, при чему $\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1$ тежи ка 0, када $n \to \infty$. Дакле, имамо ситуацију $0 \cdot \infty$, што се не може одмах одредити чему тежи, зато што не знамо да ли n брже тежи ка ∞ него $\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1$ ка 0 или обрнуто.

Зато,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n) &= \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)\cdot\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{\sqrt{n^2+n}+n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n})^2-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

4. Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, уколико је $a_n = \dfrac{1+2+...+n}{n^2}$.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2n^2}\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

5. Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, уколико је:

1. $a_n = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}$
2. $a_n = \frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\frac{1}{(3n+1)\cdot(3n+4)}$

1. Приметимо да је разлика бројева у имениоцу једнака 1, што нам се баш налази у бројиоцу. Зато, општи члан низа a_n можемо расписати на следећи начин:

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\\ &= \frac{2-1}{1\cdot 2}+\frac{3-2}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{n+1-n}{n(n+1)}\\ &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\\ &= 1-\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

Сада је једноставно:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1}) = 1.$$

2. Исту идеју ћемо искористити и за решавање овог примера. Сада примећујемо да је разлика бројева у имениоцу једнака 3, али у бројиоцу су свуда јединице. Зато прво вршимо одговарајућу корекцију:

$$\begin{aligned}a &= \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4\cdot 7}+\frac{3}{7\cdot 10}+\cdots+\frac{3}{(3n+1)(3n+4)}\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{7-4}{4\cdot 7}+\frac{10-7}{7\cdot 10}+\cdots+\frac{3n+4-(3n+1)}{(3n+1)(3n+4)}\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+4}\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3n+4}\right).\end{aligned}$$

Коначно је

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}(\frac{1}{4}-\frac{1}{3n+4}) = \frac{1}{12}.$$

6. Израчунати следеће граничне вредности:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{2n+3}{2n+1})^n$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{2n+3}{5n+1})^n$

1. Желимо да применимо граничну вредност из (3).

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1+2}{2n+1}\right)^n\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{2n+1}\right)^n\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n+1}{2}}\right)^{\frac{2n+1}{2}\cdot\frac{2}{2n+1}\cdot n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{2n+1}{2}}\right)^{\frac{2n+1}{2}}\right)^{\frac{2n}{2n+1}}\\ &= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{2n}{2n+1}}\\ &= e^{\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2n+1}}\\ &= e.\end{aligned}$$

2. Приметимо да $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{5n+1} \neq 1$, што значи да не можемо директно применити граничну вредност (3) на цео разломак. Зато, „наместићемо”на поменуту граничну вредност засебно бројилац и име-

нилац.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{5n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{2n+3}{2n}}{\frac{5n+1}{5n}}\cdot\frac{2n}{5n}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{2n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{5n}\right)^n}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{\frac{2n}{3}}\right)^{\frac{2n}{3}\cdot\frac{3}{2n}\cdot n}}{\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{5n\cdot\frac{n}{5n}}}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n$$

$$= \frac{e^{\frac{3}{2}}}{e^{\frac{1}{5}}}\cdot 0$$

$$= 0.$$

Искоришћено је да $(\frac{2}{5})^n \to 0$, када $n\to\infty$, што је (1) за $q=\frac{2}{5}$.

7. Одредити граничну вредност низа чији је општи члан дат са:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}, n\in\mathbb{N}.$$

У овом задатку, циљ је применити теорему о три низа. Први корак је да ограничимо општи члан низа a_n. Међутим, општи члан низа је исувише компликован да бисмо одмах могли то да урадимо. Зато, кренимо од једноставнијег задатка: ограничимо прво n^2+1, $n^2+2, \cdots n^2+n$.

$$\begin{gathered} n^2 < n^2+1 < n^2+n+1 \\ n^2 < n^2+2 < n^2+n+2 \\ \vdots \\ n^2 < n^2+n < n^2+n+n \end{gathered}$$

Како тежимо ка томе да ограничимо сваки од сабирака из општег члана низа a_n, одредимо реципрочну вредност:

$$\begin{gathered} \frac{1}{n^2} > \frac{1}{n^2+1} > \frac{1}{n^2+n+1} \\ \frac{1}{n^2} > \frac{1}{n^2+2} > \frac{1}{n^2+n+2} \\ \vdots \\ \frac{1}{n^2} > \frac{1}{n^2+n} > \frac{1}{n^2+n+n} \end{gathered}$$

Како су све вредности позитивне, важе и следеће неједнакости:

$$\begin{gathered} \frac{1}{\sqrt{n^2}} > \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} > \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} \\ \frac{1}{\sqrt{n^2}} > \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} > \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n^2}} > \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} > \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} \end{gathered}$$

Да бисмо ограничили баш општи члан низа a_n, преостаје нам још да саберемо претходне неједнакости. Ту се поставља питање колико сабирака има у општем члану низа a_n. На основу бројача који фигурише у a_n, јасно је да их има n. Зато, након сабирања претходних неједнакости, добијамо:

$$n\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2}} > a_n > n\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}$$

Означимо са $b_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}}$ и $c_n = \frac{n}{\sqrt{n^2}} = 1$. Како је $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1$, на основу теореме о три низа следи да је

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

Додатни решени задаци

8. Одредити граничну вредност:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+n}{3n^2+n-2}\right)^{\frac{n^3+6n}{5n-1}}.$$

Желимо да искористимо граничну вредност (3).

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+n}{3n^2+n-2}\right)^{\frac{n^3+6n}{5n-1}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+n-2+2}{3n^2+n-2}\right)^{\frac{n^3+6n}{5n-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{3n^2+n-2}\right)^{\frac{n^3+6n}{5n-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{3n^2+n-2}{2}}\right)^{\frac{3n^2+n-2}{2}}\right)^{\frac{2}{3n^2+n-2}\cdot\frac{n^3+6n}{5n-1}}$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty}\frac{2(n^3+6n)}{(3n^2+n-2)(5n-1)}}$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3\left(1+\frac{6}{n^2}\right)}{n^3\left(3+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}\right)\left(5-\frac{1}{n}\right)}}$$

$$= e^{\frac{2}{15}}.$$

9. Одредити граничну вредност низа (a_n) чији је општи члан:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^3-2n+2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{n^3-2n+3}} +\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+2n}}, n\in\mathbb{N}$$

За почетак, приметимо да важи:

$$\begin{gathered} n^3-2n+1 < n^3-2n+2 < n^3+2n+1 \\ n^3-2n+1 < n^3-2n+3 < n^3+2n+1 \\ \vdots \\ n^3-2n+1 < n^3+2n < n^3+2n+1 \end{gathered}$$

А затим важи и:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^3-2n+1}} > \frac{1}{\sqrt[3]{n^3-2n+2}} > \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+2n+1}}$$
$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^3-2n+1}} > \frac{1}{\sqrt[3]{n^3-2n+3}} > \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+2n+1}}$$
$$\vdots$$
$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^3-2n+1}} > \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+2n}} > \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+2n+1}}$$

Претходне неједнакост важе $\forall n > 1$. Пре сумирања ових неједнакости, потребно је одредити број сабирака у a_n, који је једнак: $n^3+2n-(n^3-2n+2)+1 = 4n-1$.

Коначно, добија се да је:

$$\frac{4n-1}{\sqrt[3]{n^3-2n-1}} > a_n > \frac{4n-1}{\sqrt[3]{n^3+2n+1}}.$$

Уколико означимо са $b_n = \frac{4n-1}{\sqrt[3]{n^3+2n+1}}$, а са $c_n = \frac{4n-1}{\sqrt[3]{n^3-2n-1}}$, имамо да је $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 4$,па на основу теореме о три низа, важи да је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 4$.

Задаци за самосталан рад

10. Одредити граничну вредност низа (a_n) чији је општи члан:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+3+\sin n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+5+\sin n^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n+1+\sin n^n}}, n \in \mathbb{N}$$

11. Одредити граничну вредност низа (a_n) чији је општи члан:

$$a_n = \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{2}{3\cdot 5} + \frac{4}{5\cdot 9} + \cdots + \frac{2^n}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}, n \in \mathbb{N}.$$

12. Одредити граничну вредност низа (a_n) чији је општи члан:

$$a_n = \frac{\ln(1+\frac{1}{2})}{\ln 2\cdot \ln 3} + \frac{\ln(1+\frac{1}{3})}{\ln 3\cdot \ln 4} + \cdots + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n\cdot \ln(n+1)}, n \in \mathbb{N}.$$