

Теоријске основе

У наставку је крајњак преглед знања које је неопходно за решавање задатака који следе. Он никако није замена за предавања.

Права p у простору је одређена једном тачком $P(x_p, y_p, z_p)$ кроз коју пролази и вектором \vec{v}_p коме је паралелна. Желимо да изведемо једначину праве p . Уочимо произвољну тачку $X(x, y, z)$ са праве p . Тада је $\vec{PX} = X - P = (x - x_p, y - y_p, z - z_p)$. Како вектори \vec{v}_p и \vec{PX} имају исти правац, следи да: $\vec{PX} = t\vec{v}_p$, где је t реални коефицијент. Распишимо последњу једначину:

$$\begin{aligned} X - P &= t\vec{v}_p \\ X &= P + t\vec{v}_p \\ (x, y, z) &= (x_p, y_p, z_p) + t(a, b, c) \end{aligned}$$

Из последње једначине, добијамо следеће три једначине:

$$p: \begin{cases} x = x_p + ta \\ y = y_p + tb \\ z = z_p + tc \end{cases} \quad (1)$$

Једначина 1 представља **параметарски облик једначине праве**. Изразимо t из сваке од једначина:

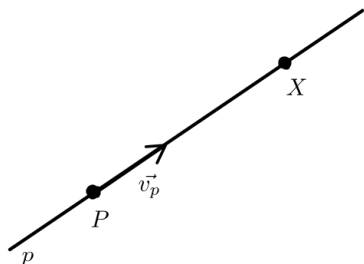
$$t = \frac{x - x_p}{a} = \frac{y - y_p}{b} = \frac{z - z_p}{c}$$

Тада

$$p: \frac{x - x_p}{a} = \frac{y - y_p}{b} = \frac{z - z_p}{c}$$

представља **канонски облик једначине праве** p .

Било да је права задата у параметарском или канонском облику, из њих можемо прочитати једну тачку која припада правој $P(x_p, y_p, z_p)$ као и њен вектор правца $\vec{v}_p = (a, b, c)$.

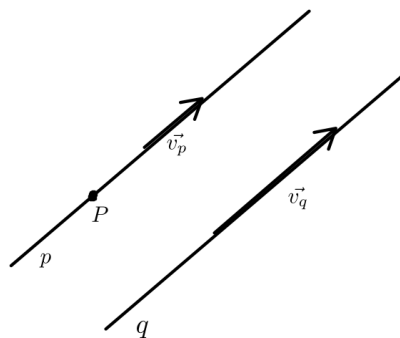


Слика 1: Права одређена вектором правца и једном тачком

Права може бити задата и као пресек две равни. У том случају, трансформисаћемо једначину на параметарски или канонски облик.

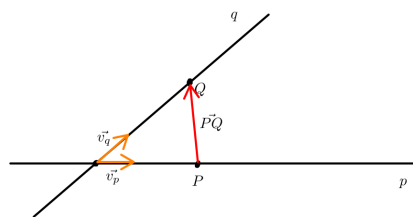
Међусобни положај две праве $p(P, \vec{v}_p)$ и $q(Q, \vec{v}_q)$

- Уколико је $\vec{v}_p = \lambda\vec{v}_q$, тада је $p \parallel q$. Специјално, уколико $P \in q$, тада се праве p и q поклапају.



- Уколико је $\vec{v}_p \neq \lambda\vec{v}_q$, тада праве p и q нису паралелне, већ се секу ако су копланарне, а мимоилазе у супротном.

- Ако је $[\vec{v}_p, \vec{v}_q, \vec{PQ}] = 0$, то значи да су праве p и q у истој равни, па се у овом случају секу

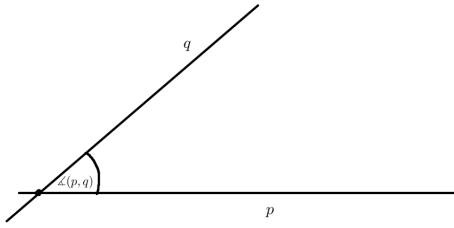


Слика 2: Праве које се секу

- Ако је $[\vec{v}_p, \vec{v}_q, \vec{PQ}] \neq 0$, праве p и q се мимоилазе.

За праве које се секу можемо одредити оштар угао који заклапају:

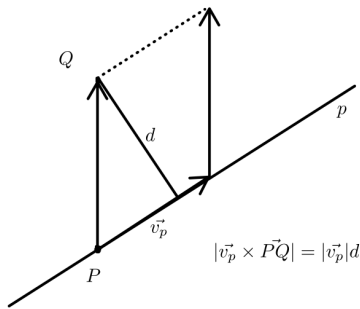
$$\cos \angle(p, q) = \frac{|\vec{v}_p \cdot \vec{v}_q|}{|\vec{v}_p| |\vec{v}_q|}$$



Слика 3: Угао између две праве које се секу

Растојање између две паралелне праве p и q се рачуна као растојање произвољне тачке са једне од правих, нпр. $Q \in q$ од друге праве p .

$$d(p, q) = d(p, Q) = \frac{|\vec{v}_p \times \vec{PQ}|}{|\vec{v}_p|}$$



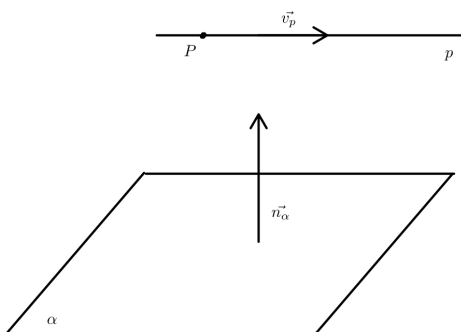
Слика 4: Растојање између две паралелне праве

Растојање између две мимоилазне праве p и q је најкраће растојање између неке две тачке $P \in p$ и $Q \in q$.

$$d(p, q) = \frac{||[\vec{v}_p, \vec{v}_q, \vec{PQ}]||}{|\vec{v}_p \times \vec{v}_q|}$$

Међусобни положај праве $p(P, \vec{v}_p)$ и равни $\alpha(A, \vec{n}_\alpha)$

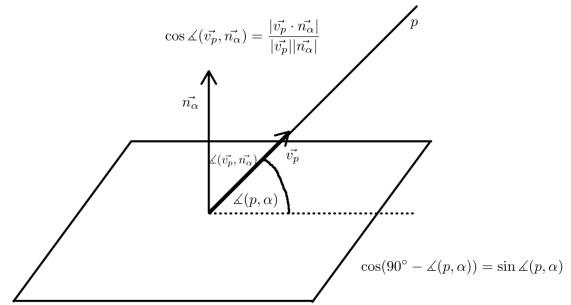
- Уколико је $\vec{v}_p \perp \vec{n}_\alpha$, тада је $p \parallel \alpha$. Специјално, ако $P \in \alpha$, онда права p припада равни α , тј. $p \subset \alpha$.



Слика 5: Права p паралелна равни α

- Уколико $\vec{v}_p \not\perp \vec{n}_\alpha$, права и раван се секу. У том случају се може говорити о углу који заклапају права p и раван α :

$$\sin \angle(p, \alpha) = \frac{|\vec{v}_p \cdot \vec{n}_\alpha|}{|\vec{v}_p| |\vec{n}_\alpha|}$$



Слика 6: Угао између праве и равни

Задаци који се раде на вежбама

- Дата је права $p: \begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0 \\ x + 3y - 2z - 3 = 0 \end{cases}$ и тачка $A(-1, 3, -2)$. Одредити праву q тако да она буде паралелна са правом p и да $A \in q$.

Како је права одређена вектором правца и једном тачком са ње, следи да нам је у овом задатку циљ да одредимо вектор правца праве q , пошто нам је тачка $A \in q$ већ позната. Услов је да праве p и q буду паралелне, што значи да и њихови вектори правца такође морају бити паралелни, тј $\vec{v}_p \parallel \vec{v}_q$. Како је $\vec{v}_p \parallel \vec{v}_q$, то значи да су та два вектора пропорционална, односно $\vec{v}_q = \lambda \vec{v}_p$, за неко $\lambda \in \mathbb{R}$. Дакле, потребан нам је вектор правца праве p .

Права p је задата као пресек две равни, што нам није погодан облик за читање вектора правца из ње. Зато, трансформишимо је на параметарски облик. Решавамо систем:

$$\begin{array}{r} 3x - y + 2z - 7 = 0 \\ x + 3y - 2z - 3 = 0 \\ \hline 3x - y + 2z - 7 = 0 \\ 4x + 2y \quad \quad = 10 \quad II + I \end{array}$$

Нека је $x = t, t \in \mathbb{R}$. Тада су остале непознате једнаке: $y = 5 - 2t, z = 6 - \frac{5}{2}t$. Дакле, решење овог система се интерпретира као права, која је у параметарском облику представљена као:

$$p: \begin{cases} x = 0 + t \\ y = 5 - 2t \\ z = 6 - \frac{5}{2}t \end{cases}$$

где је $t \in \mathbb{R}$. Сада из добијеног параметарског облика једначине праве p , имамо да је њен вектор правца $\vec{v}_p = (1, -2, -\frac{5}{2})$.

Сада можемо одредити вектор правца праве q који је једнак $\vec{v}_q = \lambda \vec{v}_p$. За вредност параметра λ може се узети било који реалан број различит од нуле. Овде, изабраћемо да је $\lambda = 2$, како бисмо изгубили разломак који се појављује у \vec{v}_p .

Дакле,

$$\vec{v}_q = \lambda \vec{v}_p = 2(2, -2, -\frac{5}{2}) = (2, -4, -5).$$

Коначно, како имамо тачку $A \in q$ и \vec{v}_q , можемо одмах записати нпр. канонски облик тражене праве q .

$$q: \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z+2}{-5}.$$

2. Нека су дате права $p: \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-1}{1}$, права $q: x = 2t - 2, y = 3t - 3, z = -3t - 1, t \in \mathbb{R}$ и тачка $A(3, 2, -5)$. Одредити праву r тако да $A \in r$ и да вектор правца праве r буде ортогоналан на праве p и q .

Праве p и q су дате у канонском и параметарском облику, редом. Из њих можемо прочитати тачку $P(2, -3, 1) \in p$, вектор правца праве p $\vec{v}_p = (3, -2, 1)$, тачку $Q(-2, -3, -1) \in q$ и вектор правца праве q $\vec{v}_q = (2, 3, -3)$. Како је услов задатка да вектор правца тражене праве r нормалан на праве p и q , то значи да је вектор правца \vec{v}_r нормалан на векторе правца \vec{v}_p и \vec{v}_q . Тако за вектор \vec{v}_r можемо узети онај који је једнак вектором производу вектора \vec{v}_p и \vec{v}_q . Дакле,

$$\vec{v}_r = \vec{v}_p \times \vec{v}_q = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = (3, 11, 13).$$

Имамо вектор правца праве r $\vec{v}_r = (3, 11, 13)$ и тачку $A(3, 2, -5) \in r$, тако да можемо записати праву r у канонском облику:

$$r: \frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{11} = \frac{z+5}{13}.$$

3. Одредити растојање између правих p и q ако је:

$$1. p: \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{2}, q: x = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}, y = t, z = t, t \in \mathbb{R}.$$

$$2. p: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}, q: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}.$$

1. Из једначина правих p и q , имамо да су $\vec{v}_p = (1, 2, 2)$ и $\vec{v}_q = (\frac{1}{2}, 1, 1)$. Приметимо да важи да је $\vec{v}_p = 2\vec{v}_q$, па закључујемо да је $p \parallel q$. Зато је растојање једнако: $d(p, q) = \frac{|\vec{v}_q \times \vec{PQ}|}{|\vec{v}_p|}$. За P и Q узимамо тачке $P(3, -1, 2)$ и $Q(\frac{1}{2}, 0, 0)$, а одатле имамо да је $\vec{PQ} = (-\frac{5}{2}, 1, 2)$. Даље, вектор који је векторски производ вектора \vec{v}_q и \vec{PQ} јесте $\vec{v}_q \times \vec{PQ} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-3, -\frac{3}{2}, 3)$.

$$\text{Сада је } d(p, q) = \frac{\sqrt{9 + \frac{9}{4} + 9}}{\sqrt{\frac{1}{4} + 1 + 1}} = 3.$$

2. Видимо да је $\vec{v}_p = (1, 1, 2)$ и $\vec{v}_q = (1, 3, 4)$. Испитујемо прво међусобни положај правих p и q . Видимо да одговарајући вектори правца нису пропорционални, те закључујемо да се праве или секу или су мимоилазне, па рачунамо одговарајући мешовити производ. Тачке P и Q са правих p и q редом, су $P(-1, 0, 1)$ и $Q(0, -1, 2)$, па је $\vec{PQ} = (1, -1, 1)$. Сада

$$\text{је } [\vec{v}_p, \vec{v}_q, \vec{PQ}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0, \text{ одакле закључујемо да се праве } p \text{ и } q \text{ мимоилазе. Даље, имамо да је}$$

$$\vec{v}_p \times \vec{v}_q = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-2, -2, 2), \text{ а интензитет добијеног вектора је } |\vec{v}_p \times \vec{v}_q| = \sqrt{4 + 4 + 4} = 2\sqrt{3}.$$

Коначно, растојање између правих p и q је $d(p, q) = \frac{|[\vec{v}_p, \vec{v}_q, \vec{PQ}]|}{|\vec{v}_p \times \vec{v}_q|} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

4. Одредити једначину праве a која садржи тачку $A(2, -3, 1)$ и сече праве $p: \frac{x+1}{-3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{2}$ и $q: \frac{x-7}{2} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}$.

Из канонских облика једначина правих p и q имамо да је $P(-1, -2, 1) \in p$, $\vec{v}_p = (3, -3, 2)$, $Q(7, -4, 1) \in q$, $\vec{v}_q = (2, -2, 2)$. Како имамо тачку $A(2, -3, 1) \in a$, потребно је одредити вектор правца праве a , $\vec{v}_a = (u, v, w)$.

Из услова задатка који каже да се праве a и p секу, као и праве a и q , имамо да мора важити да су одговарајући мешовити производи једнаки 0:

$$[\vec{v}_a, \vec{v}_p, \vec{AP}] = 0$$

$$[\vec{v}_a, \vec{v}_q, \vec{AQ}] = 0$$

Како су $\vec{AP} = (-3, 1, 0)$ и $\vec{AQ} = (5, -1, 0)$, мешовите производе расписујемо редом као:

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ 3 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ 2 & -2 & 2 \\ 5 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Рачунањем детерминанте, добија се систем од 2 једначине:

$$u + 3v + 3w = 0$$

$$u + 5v + 4w = 0.$$

Решење овог система је $\vec{v}_a = (u, v, w) = (3t, t, -2t)$, $t \in \mathbb{R}$. За произвољно одабран параметар, нпр $t = 1$, добијамо један од вектора правца $\vec{v}_a = (3, 1, -2)$. Једначина праве a је:

$$a: \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{-2}.$$

5. Нека су дате тачке $A(0, 0, 1)$, $B(2, 1, 3)$, $C(-1, -1, -2)$ и $D(-5, 9, 2)$.

а) Одредити једначину равни π тако да $A, B, C \in \pi$.

б) Одредити тачку D' симетричну тачки D у односу на раван π .

а) Раван π има једначину:

$$\pi : \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-1 \\ 2-0 & 1-0 & 3-1 \\ -1-0 & -1-0 & 2-1 \end{vmatrix} = 0.$$

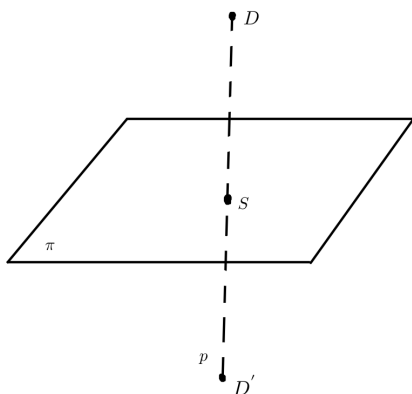
која је када се израчуна детерминанта $\pi : 3x - 4y - z + 1 = 0$.

б) Тачка D' је симетрична тачка тачки D у односу на раван π уколико важи да средиште дужи DD' припада равни π и да је $DD' \perp \pi$. Нека је права p таква да $D \in p$ и $p \perp \pi$. Јасно је са слике да се за \vec{v}_p може узети $\vec{v}_p = \vec{n}_\pi = (3, -4, 1)$. Тада је једначина праве

$$p : \frac{x+5}{3} = \frac{y-9}{4} = \frac{z-2}{-2},$$

што значи да свака тачка која припада правој p , па и тачка S има координате $(3t-5, -4t+9, -t+2)$, $t \in \mathbb{R}$. Одредићемо вредност параметра t за тачку S тако што искористимо чињеницу да $S \in \pi : 3(3t-5) - 4(-4t+9) - (-t+2) + 1 = 0$, одакле се добија да је $t = 2$. Дакле, имамо тачку $S(1, 1, 0)$, а како је она средиште дужи DD' :

$$S = \frac{D + D'}{2} \Rightarrow D' = 2S - D = (7, -7, -2).$$



6. Одредити тачку B симетричну тачки $A(-1, 0, -1)$ у односу на праву $p : \frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-4}{2}$.

Уочимо тачку $S \in p$ која представља пројекцију тачке A на праву p .

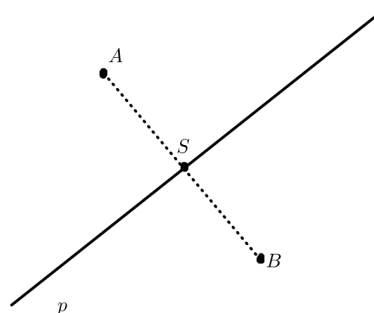
Како $S \in p$, њене координате су $S(t-1, -1, 2t+4)$, $t \in \mathbb{R}$. Са друге стране, како је тачка S подножје нормале из A на праву p , имамо да је $\vec{AS} \perp p$, односно $\vec{AS} \perp \vec{v}_p$. Последња релација значи да је

$$\begin{aligned} \vec{AS} \cdot \vec{v}_p &= 0 \\ (t, -1, 2t+5) \cdot (1, 0, 2) &= 0 \\ t + 4t + 10 &= 0 \end{aligned}$$

$$t = -2$$

Дакле, добили смо тачку $S(-3, -1, 0)$.

Коначно, $S = \frac{A+B}{2}$, одакле је $B = 2S - A = (-5, -2, 1)$.



7. Дата је права $p : \frac{x-1}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$ и раван $\alpha : x + y - z + 1 = 0$.

а) Одредити пресечну тачку праве p и равни α .

б) Одредити угао између праве p и равни α .

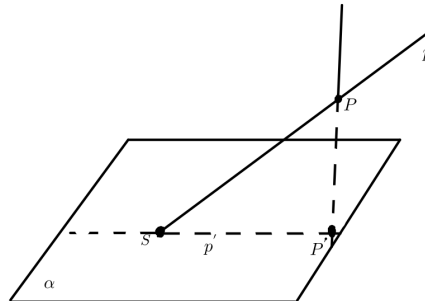
в) Одредити нормалну пројекцију праве p на раван α .

а) Нека $S \in p \cap \alpha$, што значи да $S \in p$ и $S \in \alpha$. Из услова да $S \in p$, следи да тачка S има координате $S(1, 2t, t-1)$, $t \in \mathbb{R}$, а онда из $S \in \alpha$ следи да је $1 + 2t - t + 1 + 1 = 0$, одакле се добија да је $t = -3$.

Дакле, $p \cap \alpha = S, S(1, -6, -4)$.

б) Како се права и раван секу, имамо да је $\sin \angle(p, \alpha) = \frac{|\vec{v}_p \cdot \vec{n}_\alpha|}{|\vec{v}_p| |\vec{n}_\alpha|} = \frac{|(0, 2, 1) \cdot (1, 1, -1)|}{\sqrt{0+4+1} \sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{15}}$, па је $\angle(p, \alpha) = \arcsin \frac{1}{\sqrt{15}}$.

в) Означимо тражену праву са p' . Пројекцију праве p на раван α ћемо одредити тако што ћемо пројектовати две тачке са праве p на раван, с обзиром на то да је права одређена са две разне тачке. Како права p сече раван у тачки S , њена пројекција на раван је већ она сама, зато што $S \in \alpha$.



Одредимо још пројекцију тачке $P(1, 0, -1) \in p$ на раван α , коју ћемо обележити са P' . Означимо са a праву за коју важи да $P \in a$ и $a \perp \pi$. За њен вектор правца можемо узети $\vec{v}_a = \vec{n}_\pi = (1, 1, -1)$. Једначина праве a је: $a : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$, а како $P' \in a$, имамо да је $P'(t+1, t, -t-1)$, $t \in \mathbb{R}$. Са друге стране,

$P' \in \alpha$, па имамо да је $t + 1 + t + t + 1 + t = 0$, одакле је $t = -1$, односно $P'(0, -1, 0)$.

Како имамо две тачке са праве p које су пројекције на раван α , оне припадају траженој правој p' , тј $S, P' \in p'$. Зато, за вектор правца праве p' се може узети $\vec{v}_{p'} = \vec{SP}' = (-1, 5, 4)$.

Пројекција праве p на раван α је права p' са једначином $p' : \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{5} = \frac{z}{4}$.

Додатни решени задаци

8. Дате су права $p : \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{3}$, права $q : \frac{x}{-1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-9}{1}$ и раван $\beta : x - y + z - 2 = 0$. Одредити координате тачке $B \in \beta$ која је најближа пресечној тачки правих p и q .

Одредимо прво пресечну тачку правих p и q . Нека $A \in p \cap q$. Тада она има координате $A(2t - 1, t + 2, 3t)$, $t \in \mathbb{R}$ јер $A \in p$, а са друге стране има координате $A(-s, -2s - 2, s + 9)$, $s \in \mathbb{R}$, јер $A \in q$. Како се ради о истој тачки A , изједначавањем координата, добија се систем једначина:

$$\begin{aligned} 2t - 1 &= -s \\ t + 2 &= -2s - 2 \\ 3t &= s + 9 \end{aligned}$$

Решавањем система, добија се да је $t = 2$, а $s = -3$. Дакле, добили смо тачку $A(3, 4, 6)$.

Најближа тачка тачки A која се налази у равни β је њена нормална пројекција на ту раван.

Једначина праве r за коју важи да $A \in r$ и $r \perp \beta$ је: $r : \frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-6}{1}$. Тражена тачка $B \in r$, па је $B(t+3, -t+4, t+6)$, $t \in \mathbb{R}$, а уједно $B \in \beta$ одакле следи $t+3+t-4+t+6-2=0$, односно $t = -1$.

Коначно, добијена је тачка $B(2, 5, 5)$.

9. Показати да се праве $p : \frac{x-4}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-9}{4}$ и $q : \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{3}$ секу. Одредити једначину праве n која је нормална на p и q која пролази кроз њихову пресечну тачку.

Нека је S пресечна тачка правих p и q . Како $S \in p$, она има координате $S(2t+4, -t, 4t+9)$, $t \in \mathbb{R}$, док са друге стране $S \in q$, па је $S(s+1, 2s-1, 3s+2)$, $s \in \mathbb{R}$. Из чињенице да $\{S\} = p \cap q$, као у претходном задатку, добија се систем једначина:

$$\begin{aligned} 2t + 4 &= s + 1 \\ -t &= 2s - 1 \\ 4t + 9 &= 3s + 2 \end{aligned}$$

Решавањем система добија се да је $t = -1$, односно $s = 1$, па је $S(2, 1, 5)$.

Тражена права n ће имати вектор правца $\vec{v}_n = \vec{v}_p \times \vec{v}_q = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-11, -2, 5)$.

Једначина праве $n(S, \vec{v}_n)$ је

$$n : \frac{x-2}{-11} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-5}{5}.$$

Задаци за самосталан рад

10. Дате су права $p : \frac{x-5}{3} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+4}{-3}$, раван $\alpha : -2x + y - 3z + 1 = 0$ и тачка $A(2, -3, 3)$.
а) Испитати узајамни положај праве p и равни α . Одредити меру оштрог угла између њих ако се секу, односно растојање између њих ако су паралелне.
б) Одредити једначину праве која садржи тачку A и сече праву p под правим углом.

11. Дате су праве $p : \frac{x-8}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-5}{3}$ и $q : \frac{x-3}{1} = \frac{y+6}{-3} = \frac{z-1}{\lambda}$.
а) За вредност параметра $\lambda = 1$, одредити растојање између правих p и q .
б) Одредити вредност параметра λ за коју се праве p и q секу, као и координате те пресечне тачке.