Теоријске основе

У наставку је кратак преглед знања које је неопходно за решавање задатака који следе. Он никако није замена за предавања.

Представљање скупа тачака једначином

Представити неки скуп тачака у $\mathbb{R}^3$ (површ, криву итд) једначином значи формирати једнакост облика $f(x,y,z) = 0$, при чему тачка (x,y,z) припада том скупу тачака **ако и само ако** претходна једнакост за њу важи.

Што је једначина која одређује скуп једноставнија, то се, начелно, о скупу може више рећи и лакше је са њиме радити. Раван је типичан пример таквог скупа тачака, а има једначину облика

$$ax + by + cz + d = 0,$$

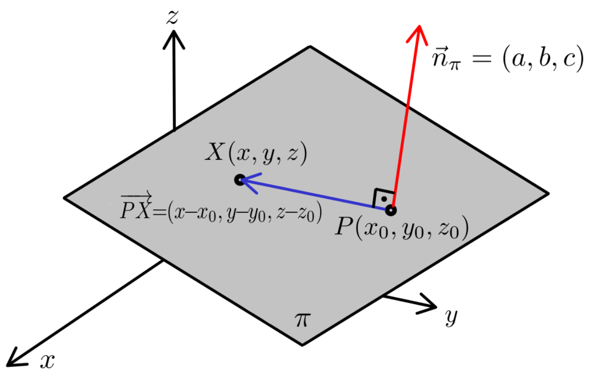
где су a, b, c и d реални бројеви.[1]

У наставку ћемо извести једначину равни на пар начина, а то ће нам открити и значење бројева a, b и c у њој.

Једначина равни: вектор нормале и једна тачка

Није тешко уочити да је раван јединствено одређена[2] вектором нормале и једном својом тачком. Заиста, вектор нормале одређује један сноп паралелних равни које су на њега нормалне, и довољна нам је још једна тачка да из тог снопа „пробере" једну раван.

Нека имамо раван π која има вектор нормале $\vec{n}_\pi = (a,b,c)$ и нека јој припада тачка $P(x_0,y_0,z_0)$. Желимо да изведемо једначину равни π која ће карактерисати то да ли јој произвољна тачка $X(x,y,z)$ припада, или не. Слика 1 илуструје идеју извођења.



Слика 1: Раван одређена вектором нормале и једном тачком

Тачка X ће припадати равни π ако и само ако је вектор $\overrightarrow{PX}$ нормалан на вектор $\vec{n}_\pi$, односно ако је $\overrightarrow{PX} \cdot \vec{n}_\pi = 0$. Како је $\overrightarrow{PX} = X - P = (x-x_0, y-y_0, z-z_0)$, то се једначина равни π може записати као

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a, b, c) = 0,$$

што након сређивања постаје

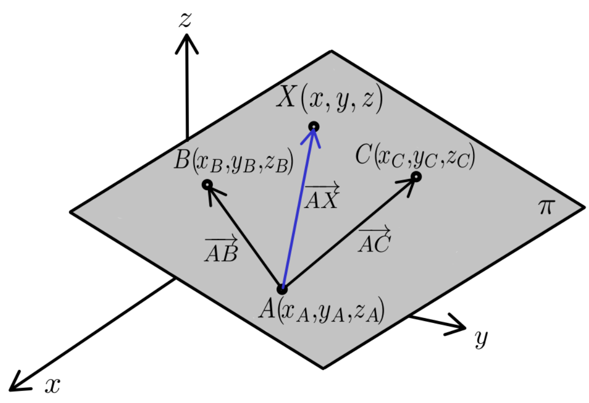
$$ax + by + cz + \underbrace{(-ax_0 - by_0 - cz_0)}_{=:d} = 0.$$

Након увођења ознаке $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$, добијамо једначину:

$$\boxed{\pi : \ ax + by + cz + d = 0}.$$

Као што смо на почетку најавили, сада је јасан смисао коефицијената a, b и c у једначини: они представљају координате вектора нормале равни.[3]

Једначина равни: три тачке



Слика 2: Раван одређена трима својим тачкама

Нека су сада дате три тачке које припадају равни π: $A(x_A,y_A,z_A)$, $B(x_B,y_B,z_B)$ и $C(x_C,y_C,z_C)$. Тражимо једначину равни π.

Тачка $X(x,y,z)$ припада равни π ако и само ако вектори $\overrightarrow{AX}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ леже у истој равни, односно акко је

$$[\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = 0.$$

Добијамо једначину равни π која садржи тачке A, B и C:

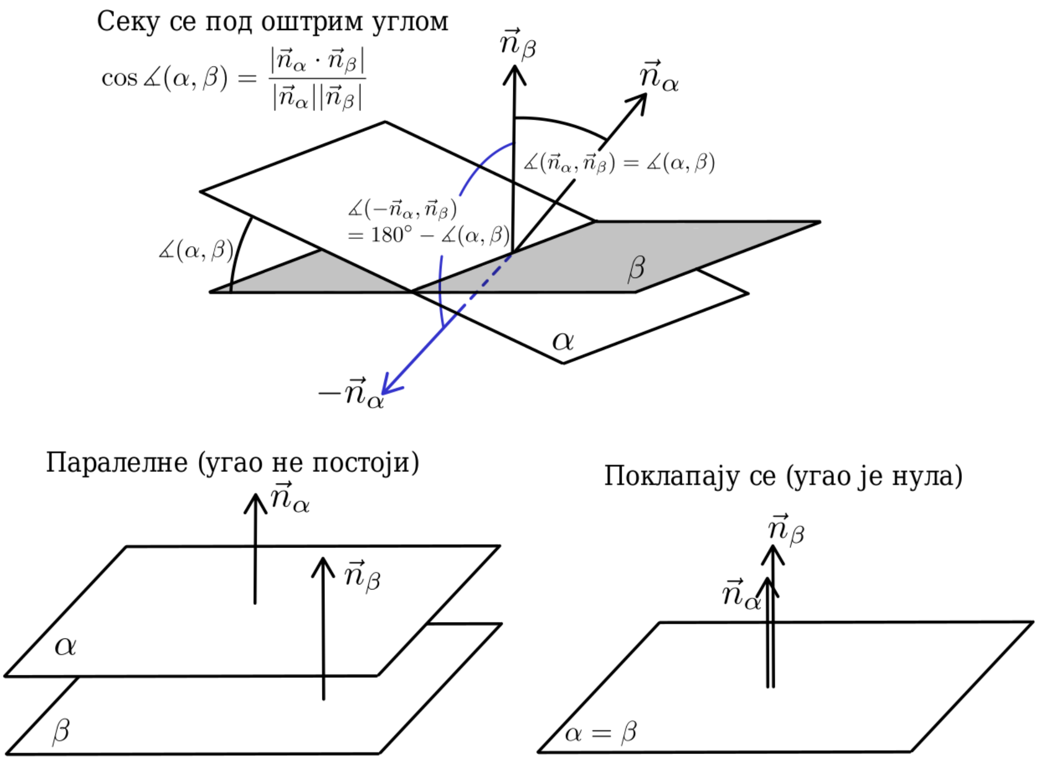
$$\boxed{\pi : \begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0}$$

И ова једначина се своди на облик $ax + by + cz + d = 0$ након рачунања детерминанте, али ју је у форми детерминанте лакше упамтити.

[1] У тривијалном случају када је $a = b = c = d = 0$, и само тада, не добија се раван, већ цели простор $\mathbb{R}^3$, али тај случај и није од неког посебног интереса.

[2] Када кажемо да је раван *јединствено одређена* неким својим особинама то заправо значи да, знајући те особине, можемо закључити о којој конкретној равни се ради. Другим речима, о равни је довољно знати те ствари, да би се знало која је то раван. Рецимо, човек није јединствено одређен именом и презименом, али јесте својим ЈМБГ.

[3] Множење обе стране једначине неким (ненула) бројем еквивалентно је множењу вектора нормале тим бројем, односно његовом продужавању/скраћивању, или „окретању на другу страну" ако је број којим се множи негативан. Новодобијени вектор је и даље вектор нормале на нашу раван; раван има онолико вектора нормале колико има ненула реалних бројева, дакле непребројиво бесконачно много.



Слика 3: Узајамни положај равни α и β

Узајамни положај равни

Две равни, α и β у простору $\mathbb{R}^3$ могу заузети два положаја: могу се сећи, или бити паралелне. У пресеку та два случаја, налази се случај $\alpha = \beta$ када се равни поклапају.

Уколико се равни α и β секу, оне ће заклопити два угла: један оштар и један туп. По конвенцији, када кажемо *угао између равни α и β*, у ознаци $\measuredangle(\alpha,\beta)$, мислићемо на оштар. Управо зато, није до краја исправно рећи да је угао између две равни једнак углу између њихових вектора нормале јер, у зависности од смера тих вектора, та два угла могу бити једнака, али и суплементна.[4] На Слици 3 дата је илустрација једне такве ситуације. Како суплементни углови имају супротне косинусе, а оштар угао има обавезно позитиван косинус, рачунамо да је

$$\cos\measuredangle(\alpha,\beta) = \frac{|\vec{n_\alpha} \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha||\vec{n}_\beta|}.$$

Уколико су равни паралелне (или се поклапају), онда је природно рачунати растојање међу њима. То се ради на следећи начин. Прво се одабере једна тачка са равни α, назовимо је A, па се онда растојање $d(\alpha,\beta)$ између равни, рачуна као растојање од тачке A до равни β.[5]

Како бисмо ову процедуру били у стању да спроведемо у пракси треба да знамо две ствари: (1), како да „погодимо" тачку са равни и (2), како се рачуна растојање од тачке до равни. Што се тиче погађања тачке, довољно је одабрати било које бројеве за њене две (од три) координате, и онда их уврстити у једначину равни, па наћи и трећу.[6] Што се тиче растојања, ако је $A(x_A, y_A, z_A)$ и $\beta:\ ax+by+cz+d=0$, онда се растојање од A до β рачуна по формули:

$$d(A,\beta) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Формулу на овом месту нећемо изводити.

Задаци који се раде на вежбама

1. Написати једначину равни π која садржи тачке $A(1,1,1)$, $B(0,-1,2)$ и $C(2,3,-1)$.

Задатак се може урадити на (барем) три начина.

Први начин јесте коришћењем „готове формуле". Раван π има једначину:

$$\pi:\ \begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ x_C-x_A & y_C-y_A & z_C-z_A \end{vmatrix} = 0,$$

односно

$$\pi:\ \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0-1 & -1-1 & 2-1 \\ 2-1 & 3-1 & -1-1 \end{vmatrix} = 0.$$

Средимо:

$$\pi:\ \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Развијемо по првој врсти:

$$\pi:\ (x-1)(4-2) - (y-1)(2-1) + (z-1)(-2+2) = 0,$$

[4] Збир им је опружен угао, тј. 180 угаоних степени.

[5] Надамо се да су сви у стању ово да замисле.

[6] Заправо, погађамо решење система једначина који има три непознате и једну једначину, па бирамо два параметра. Нисмо узалуд учили системе, зар не?

$$\pi: \ 2(x-1)-(y-1)=0,$$

па добијамо једначину равни π:

$$\boxed{\pi: \ 2x-y-1=0.}$$

Други начин јесте решавањем система. Знамо да свака раван, па и наша π има једначину облика

$$\pi: \ ax+by+cz+d=0.$$

Тачка $A(1,1,1)$ задовољава једначину равни π: $a\cdot 1+b\cdot 1+c\cdot 1+d=0$. Тачка $B(0,-1,2)$ задовољава једначину равни π: $a\cdot 0+b\cdot(-1)+c\cdot 2+d=0$. Тачка $C(2,3,-1)$ задовољава једначину равни π: $a\cdot 2+b\cdot 3+c\cdot(-1)+d=0$. Добијамо систем једначина:

$$\begin{array}{ccccccccc} a & + & b & + & c & + & d & = & 0 \\ & - & b & + & 2c & + & d & = & 0 \\ 2a & + & 3b & - & c & + & d & = & 0. \end{array}$$

Решимо га.

$$\begin{array}{cccccccccc} a & + & b & + & c & + & d & = & 0 & \\ & - & b & + & 2c & + & d & = & 0 & \\ 2a & + & 3b & - & c & + & d & = & 0 & \\ \hline a & + & b & + & c & + & d & = & 0 & \\ & - & b & + & 2c & + & d & = & 0 & \\ & & b & - & 3c & - & d & = & 0 & III-2I \\ \hline a & + & b & + & c & + & d & = & 0 & \\ & - & b & + & 2c & + & d & = & 0 & \\ & & & - & c & & & = & 0 & III+II \end{array}$$

Добијамо $c=0$ и остаје нам да решимо

$$\begin{array}{ccccccc} a & + & b & + & d & = & 0 \\ & - & b & + & d & = & 0 \end{array}$$

што је систем са више непознатих од једначина. Узимамо $d=t$, $t\in\mathbb{R}$, као параметар. Добијамо $b=t$ и $a=-2t$. Дакле:

$$(a,b,c,d)=(-2t,t,0,t)=-t(2,-1,0,-1), \quad t\in\mathbb{R}.$$

Узимамо **било које ненула решење**, рецимо $t=-1$. Добијамо да је једначина равни π:

$$\boxed{\pi: \ 2x-y-1=0.}$$

Слбода да бирамо t заправо одговара чињеници да горња једнакост остаје тачна (и еквивалентна претходној) када се помножи било којим ненула бројем.

Трећи начин за решавање задатка био би формирањем вектора нормале. Вектори $\overrightarrow{AC}=(1,2,-2)$ и $\overrightarrow{BC}=(2,4,-3)$ леже у равни π, тј. оба су паралелна са π. Значи да је вектор нормале на раван π, зовимо га $\vec{n}_\pi$ нормалан на оба, па се може узети да буде њихов векторски производ.

$$\vec{n}_\pi=\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -2\\ 2 & 4 & -3\end{vmatrix}=\cdots=(2,-1,0),$$

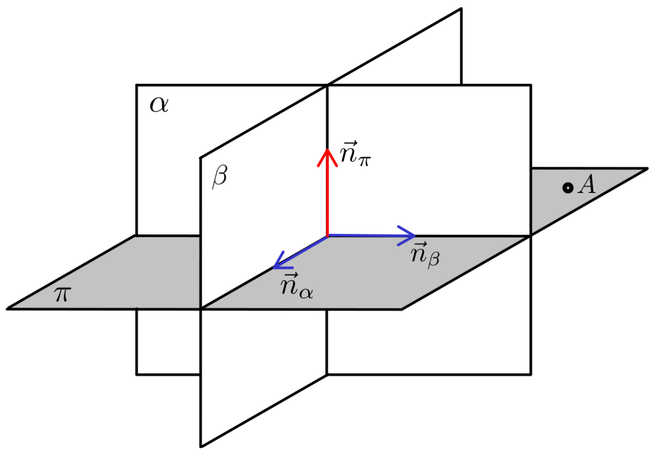
па је

$$\pi: \ 2x-y+d=0.$$

Уврштавањем координата било које од тачака A, B, C, добијамо $d=-1$, па је, наравно:

$$\boxed{\pi: \ 2x-y-1=0.}$$

2. Наћи једначину равни π која садржи тачку $A(2,-1,1)$ и нормална је на равни $\alpha: \ 3x+2y-z+4=0$ и $\beta: \ x+y+z-3=0$.



Слика 4: Слика уз Задатак2

Како раван π мора да буде нормална и на α и на β, њен вектор нормале мора бити нормалан на њихове (в. слику). Имамо да је

$$\vec{n}_\alpha=(3,2,-1), \quad \vec{n}_\beta=(1,1,1)$$

и можемо узети $\vec{n}_\pi=\vec{n}_\alpha\times\vec{n}_\beta$, јер је векторски производ, по дефиницији, нормалан на оба вектора који у њему учествују. Рачунамо:

$$\vec{n}_\pi=\vec{n}_\alpha\times\vec{n}_\beta=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=(3,-4,1).$$

Дакле, раван π има једначину

$$\pi: \ 3x-4y+z+d=0.$$

И даље нисмо искористили чињеницу да тачка $A(2,-1,1)$ лежи у равни π. Користећи ту чињеницу, добијамо:

$$3\cdot 2-4\cdot(-1)+1+d=0,$$
$$11+d=0,$$
$$d=-11.$$

Дакле, раван π има једначину

$$\boxed{\pi: \ 3x-4y+z-11=0.}$$

3. Испитати узајамни положај равни α и β. Ако су паралелне, израчунати растојање између њих, а ако се секу, израчунати оштар угао који заклапају.

а) $\alpha: \ x-y+1=0$, $\beta: \ y-z+1=0$;

б) $\alpha: \ x-2y+z-1=0$, $\beta: \ 2x-4y+2z-1=0$.

а) Видимо да су вектори нормала $\vec{n}_\alpha = (1, -1, 0)$ и $\vec{n}_\beta = (0, 1, -1)$. Ова два вектора очигледно јесу линеарно независна,[7] па се равни α и β секу. За (оштар) угао између њих важи:[8]

$$\cos\measuredangle(\alpha, \beta) = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha||\vec{n}_\beta|} = \frac{|(1, -1, 0) \cdot (0, 1, -1)|}{\sqrt{1+1+0}\sqrt{0+1+1}} = \frac{1}{2}.$$

Дакле, $\measuredangle(\alpha, \beta) = \pi/3$.

б) Видимо да је

$$\vec{n}_\alpha = (1, -2, 1), \quad \vec{n}_\beta = (2, -4, 2) = 2\vec{n}_\alpha.$$

Дакле, равни су или паралелне, или се поклапају. Међутим, ако обе стране једначине равни α помножимо бројем 2, видимо да је

$$\alpha : \ 2x - 4y + 2z - 2 = 0, \quad \beta : \ 2x - 4y + 2z - 1 = 0,$$

што није иста једначина. Дакле равни се не поклапају, већ су паралелне у правом смислу те речи. Зато тражимо растојање између њих. Знамо само формулу за растојање **тачке** од равни, не и равни од равни. Зато бирамо једну тачку са равни α. Рецимо, ако ставимо да је $y = z = 0$, добијамо (након уврштавања у једначину равни α) да је $x = 1$, па тачка $A(1, 0, 0)$ лежи у равни α. Дакле:

$$d(\alpha, \beta) = d(A, \beta) = \frac{|2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-4)^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{24}}.$$

Додатни решени задаци

4. Дате су равни $\alpha : z - 1 = 0$, $\beta : x + y - 1 = 0$ и $\pi : ax + by + z - 3 = 0$.

а) Одредити вредности реалних параметара a и b, $a, b > 0$, тако да раван π и са α и са β гради оштар угао чија је мера једнака $\pi/4$.

б) Одредити растојање равни α од координатног почетка.

а) Имамо да је $\vec{n}_\alpha = (0, 0, 1)$, $\vec{n}_\beta = (1, 1, 0)$ и $\vec{n}_\pi = (a, b, 1)$. Како је $\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, из услова задатка мора бити

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\measuredangle(\pi, \alpha) &= \frac{|\vec{n}_\pi \cdot \vec{n}_\alpha|}{|\vec{n}_\pi||\vec{n}_\alpha|} \\ &= \frac{|(a, b, 1) \cdot (0, 0, 1)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1^2}\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}},\end{aligned}$$

одакле, квадрирањем и сређивањем добијамо да је

$$a^2 + b^2 = 1. \tag{1}$$

Слично имамо да је[9]

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\measuredangle(\pi, \beta) &= \frac{|\vec{n}_\pi \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\pi||\vec{n}_\beta|} \\ &= \frac{|(a, b, 1) \cdot (1, 1, 0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1^2}\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} \\ &= \frac{a + b}{\sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 1}},\end{aligned}$$

одакле, кратећи $\sqrt{2}$ на обе стране добијамо да је

$$\frac{a + b}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}} = 1.$$

Када се решимо разломка и квадрирамо, можемо рачунати:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 1$$

па је

$$2ab = 1. \tag{2}$$

Треба да решимо систем једначина (1) и (2). Када их саберемо и уочимо квадрат бинома, имамо да је $(a + b)^2 = 2$, односно, због позитивности, $a + b = \sqrt{2}$. Даље, $b = \sqrt{2} - a$, па након уврштавања у (2) добијамо квадратну једначину $2a(\sqrt{2} - a) = 1$, односно $-2a^2 + 2a\sqrt{2} - 1 = 0$. Она има двоструко решење $a = \sqrt{2}/2$. Одатле добијамо да је $b = \sqrt{2} - \sqrt{2}/2$, односно $b = \sqrt{2}/2$. Дакле, решење дела а) задатка је

$$a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

б) Овде ћемо искористити готову формулу. Ако је $O(0, 0, 0)$, онда имамо да је

$$d(O, \alpha) = \frac{|0 - 1|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = 1.$$

Задаци за самосталан рад

Колоквијумски и испитни задаци се углавном не тичу само равни, већ равни и праве, њихових узајамних односа и сл. Стога ће додатни задаци, како решени, тако и за самосталан рад бити дати не овде, већ уз наредне, седме вежбе.

[7] Тј, они нису пропорционални. Другим речима, не постоји константа k таква да је $\vec{n}_\alpha = k\vec{n}_\beta$. То лако видимо покушавши да поделимо координате ова два вектора, у нади да ћемо у сва три случаја добити исти количник, што се **неће** десити.

[8] Моле се студенти да се подсете вредности синуса и косинуса на угловима од 0, 30, 45, 60 и 90 угаоних степени, као и тога шта је радијан, и конверзије између степени и радијана (барем за карактеристичне углове).

[9] Због услова $a, b > 0$ не треба нам апсолутна вредност.