Теоријске основе

У наставку је кратак преглед знања које је неопходно за решавање задатака који следе. Он никако није замена за предавања.[1]

Појам векторског простора

Нека је V непразан скуп, нека је K поље[2] и нека су $+ : V \times V \to V$ и $\cdot : K \times V \to V$ редом операција сабирања вектора и множења вектора скаларом.

Дефиниција 1. Алгебарска структура $(V, +, \cdot, K)$ је *векторски простор* ако је за све $\alpha, \beta \in K$ и све $u, v \in V$

1. $(V, +)$ Абелова група;
2. $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$;
3. $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$;
4. $(\alpha\beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u)$;
5. $1 \cdot u = u$.

Векторски простор се дефинише тако да апстрахује понашање вектора из $\mathbb{R}^n$ у односу на њихово уобичајено сабирање и множење (реалним) скаларом.[3] Наравно, постоји много „чудних” и апстрактних векторских простора, али ми се њима овде нећемо бавити.

Линеарна комбинација, линеарна независност

Наредне дефиниције уводе појмове и концепте есенцијалне за рад са векторским просторима.

Дефиниција 2. *Линеарна комбинација* вектора $v_1, \dots, v_n$ из V јесте вектор $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$, где су $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ скалари из K.

Дефиниција 3. *Линеарни омотач (линеал)* $L(X)$ скупа вектора $X = \{v_1, \dots, v_n\}$ јесте скуп свих линеарних комбинација вектора $v_1, \dots, v_n$. Ако је A неки скуп вектора и $L(X) = A$, кажемо да је X *генераторски скуп* за A.

Дефиниција 4. Вектори $v_1, \dots, v_n$ векторског простора V су *линеарно зависни* ако постоје скалари $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ из K, од којих је барем један различит од нуле и за које важи[4]

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0.$$

У супротном, вектори су линеарно независни.

Суштински, скуп вектора је линеарно зависан ако се барем један од њих може изразити као линеарна комбинација осталих (уверити се да дефиниција заиста то каже!). Ако се један вектор може изразити преко осталих, он је у неком смислу „вишак”, јер линеарни омотач целог скупа остаје непромењен кад се он уклони из њега.

База и димензија

Дефиниција 5. Скуп вектора из V чини базу уколико је линеарно независан и генерише V.

Број елемената базе јесте *димензија* векторског простора. Просторе са бесконачним базама зовемо *бесконачнодимензионални простори.*[5]

Дефиниција има смисла само уколико су сваке две базе у бијекцији, односно у случају коначне димензије, имају исти број елемената. Може се показати да је то тачно.

Вектори у $\mathbb{R}^3$

Векторски простор[6] $\mathbb{R}^3$ ће бити централни појам нашег изучавања на Математици 1; овај простор је нарочито важан, јер, суштински, у њему живимо.[7] Начин на који се врше операције у овом простору дат је у Задатку 1.

Елемент векторског простора $\mathbb{R}^3$ је тачка у простору. Ипак, због потреба физике и сличних природних наука, вектор се природно може замислити као „усмерена стрелица”, која почиње у координатном почетку, а завршава се у тачки која представља његове координате. Дакле, вектор $\vec{v} = (x_v, y_v, z_v)$ може се просто сматрати тачком $V(x_v, y_v, z_v)$ у простору, или се може видети и као усмерена стрелица из координатног почетка ка тој тачки.[8] Слика 1 илуструје поменуту дуалност.

[1] За ове вежбе то посебно важи, јер ћемо овде бити нарочито неформални; говорићемо о „усмереним стрелицама”, правилу десне руке, десне тројке и сличним, полуформалним појмовима. То је све у циљу да се на практичном нивоу градиво боље усвоји, али је та груба, техничка знања, касније неопходно „упеглати” знањем формалне теорије.

[2] Појам поља учи се на предавањима. Уколико смо заборавили шта је поље, овде треба стати, подсетити се, па наставити читање.

[3] У ком скупу живи јединица из тачке 5?

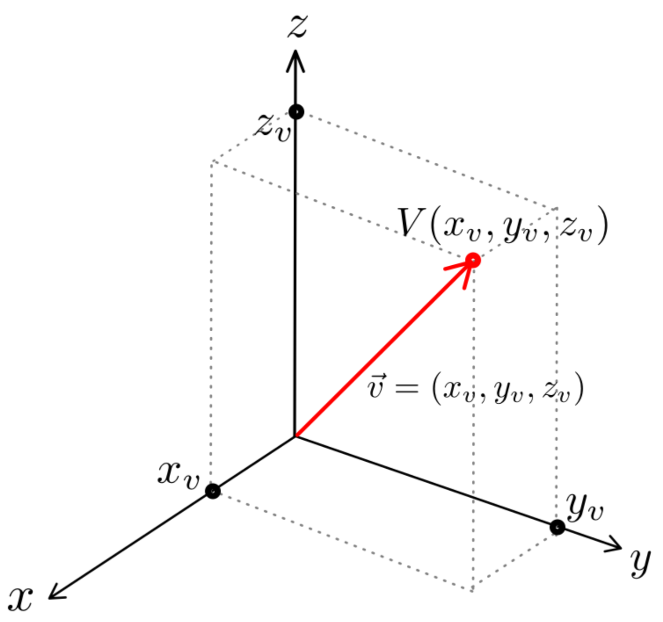
[4] У ком скупу живи нула у изразу који следи?

[5] За један такав сигурно знамо: његову базу чине $1, x, x^2, x^3, \dots$ Ради се о простору полинома са (нпр.) реалним коефицијентима.

[6] Често ћемо злоупотребити нотацију па ћемо рећи „векторски простор”, а записати само скуп, подразумевајући операције и поље скалара. То је честа пракса у литератури.

[7] Дала би се водити дискусија око овога, али дефинитивно превазилази оквире предмета. Рецимо, да ли је време четврта димензија и, ако јесте, да ли има посебно место у односу на три просторне, или не?

[8] Из потребе да разликујемо тачку и вектор са практичног становишта, иако значе исто, користимо мало друкчију нотацију, па код означавања тачке не пишемо знак једнакости, већ одмах отварамо заграду и пишемо њене координате. Такође, ознака вектора са стрелицом изнад углавном је резервисана за векторе из $\mathbb{R}^3$. Није неопходно писати стрелицу, докле год смо конзистентни у свом запису. Све претходно речено је ствар конвенције, и не би ни за епсилон променило математику чак и да се из корена редизајнира.



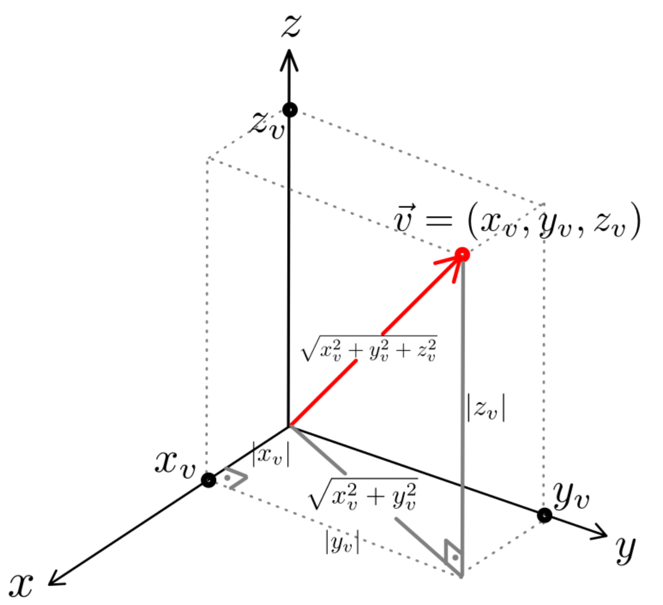
Слика 1: Дуалност вектора и тачке

Сходно тој дуалности, вектор из $\mathbb{R}^3$ може се задати као уређена тројка реалних бројева, али еквивалентно и тако што му се зада ***правац*** (права на којој лежи, тј. сноп паралелних правих), ***смер*** (на коју страну дуж те праве је усмерен) и ***интензитет*** („дужина стрелице”).

За вектор $\vec{v} = (x_v, y_v, z_v)$, интензитет ћемо означавати $|\vec{v}|$, а он се рачуна као

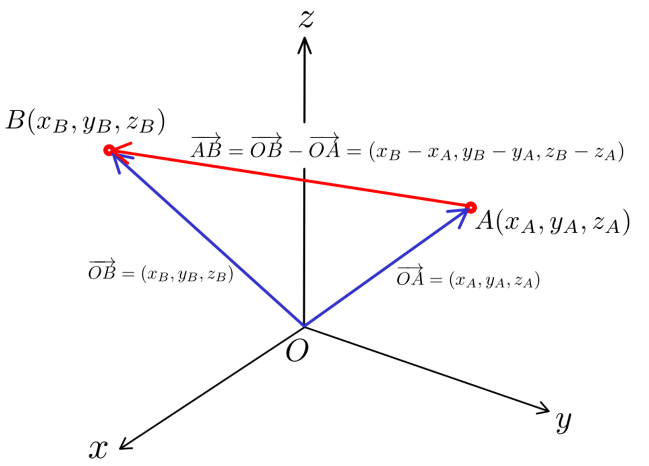
$$|\vec{v}| = \sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2}.$$

Слика 2 појашњава зашто баш тако.



Слика 2: Интензитет вектора

Номинално разликовање тачке и вектора омогућава нам да на основу координата двеју тачака $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$, њиховим одузимањем, одмах добијемо координате вектора $\overrightarrow{AB}$ између њих. Заправо, ако тај вектор замислимо као стрелицу од A до B, онда добијамо координате тачке на коју показује њен крај, кад се њен почетак позиционира у координатни почетак. Слика 3 се труди да илуструје ово што смо рекли.



Слика 3: Вектор „од тачке до тачке”

Још једна специфичност векторског простора $\mathbb{R}^3$ јесте и могућност увођења додатних операција[9] са векторима које су својствене само за њега.[10] Ми ћемо пажњу посветити ***скаларном, векторском*** и ***мешовитом производу*** вектора.

Сваки од ова три производа дефинисан је са одређеним циљем, да карактерише неко својство које вектор или скуп вектора може да има. Сваки је дефинисан формално, али има и „лакши” начин рачунања. Зато, за сваки од ова три производа дискутоваћемо три ствари:

- како је дефинисан,
- како се рачуна у координатама и
- чему служи.

Скаларни производ

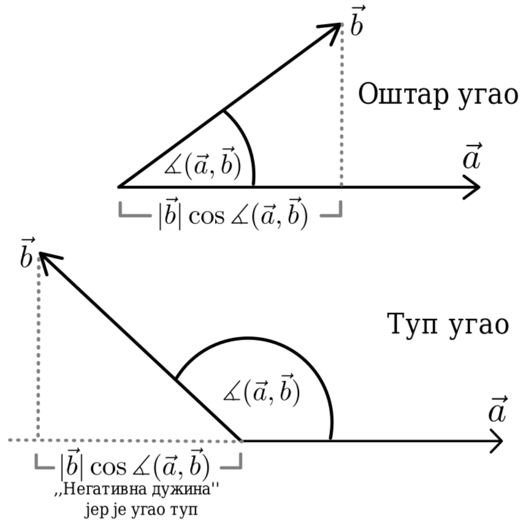
Први на реду је скаларни производ. Најопштију дефиницију скаларног производа овде ћемо изоставити, а изложићемо само оно што нам треба за наш конкретан простор.

Нека су нам дата два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Скаларни производ $\vec{a} \cdot \vec{b}$ једнак је *производу интензитета првог вектора и пројекције другог вектора на први.* Притом, дужина пројекције је негативна ако вектори заклапају туп угао. Ово можемо записати као

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}). \tag{1}$$

Да горња формула заиста представља дефиницију коју смо малочас изрекли, уверава нас Слика 4.

[9]Зваћемо их операције, иако две од три неће бити операције по дефиницији, јер нису затворене. О том потом.
[10]Тј. неке од њих за произвољно $\mathbb{R}^n$, али поента стоји.



Слика 4: Скаларни производ

Овиме смо (делимично) одговорили на питање како је скаларни производ дефинисан. Ипак, израз (1) нам не даје идеју како срачунати скаларни производ за два конкретна вектора; интензитете знамо да нађемо, али немамо појма како да нађемо косинус угла између вектора. Може се показати да, ако је $\vec{a} = (x_a, y_a, z_a)$ и $\vec{b} = (x_b, y_b, z_b)$, онда је

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b.$$

Ова формула нам даје практичан начин како да рачунамо скаларни производ, а израз (1) и пратећа дефиниција нам објашњава његов геометријски смисао.

Коначно, имајући у виду дефиницију, израз (1) и Слику 4, није тешко закључити да скаларни производ служи томе да карактерише ортогоналност. Наиме, *два вектора су ортогонална (нормална, под правим углом, управна) ако и само ако је њихов скаларни производ једнак нули.*

Наглашавамо да је **скаларни производ два вектора реалан број**, па он није операција у оном смислу који смо видели на првим вежбама. Од занимљивих особина, он је комутативан, то јест важи да је $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ за било која два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Сходно томе да није операција, нема смисла причати о асоцијативности, али је, рецимо, *билинеаран*

$$(\alpha\, \vec{a} + \beta\, \vec{b}) \cdot (\gamma\, \vec{c} + \delta\, \vec{d}) = \alpha\gamma\, (\vec{a} \cdot \vec{c}) + \alpha\delta\, (\vec{a} \cdot \vec{d}) + \beta\gamma\, (\vec{b} \cdot \vec{c}) + \beta\delta\, (\vec{b} \cdot \vec{d}),$$

што за последицу има и то да је дистрибутиван према сабирању вектора.

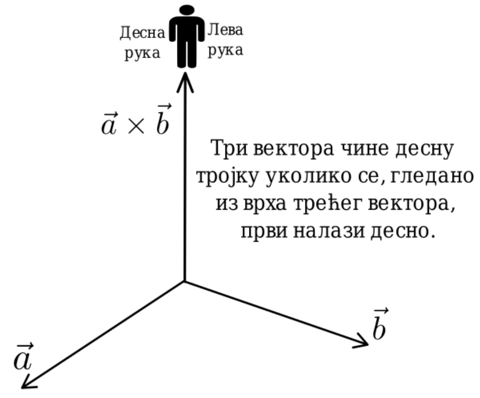
Векторски производ

Нека су дати вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ у $\mathbb{R}^3$. Њихов векторски производ јесте **вектор** $\vec{a} \times \vec{b}$ који има:

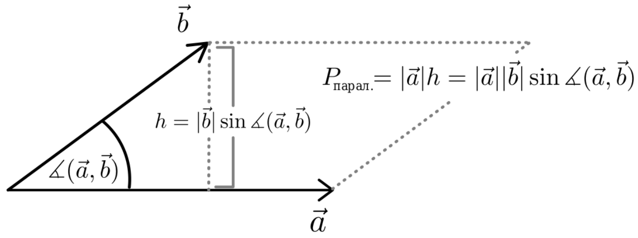
- правац ортогоналан и на $\vec{a}$ и на $\vec{b}$,
- смер такав да $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{a} \times \vec{b}$ чине **десну тројку** (правило десне руке, десног завртња),
- интензитет једнак површини паралелограма над векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}). \tag{2}$$

Слика 5 илуструје шта подразумева правило десне тројке, а Слика 6 зашто се интензитет векторског производа рачуна по формули (2).



Слика 5: Десна тројка



Слика 6: Интензитет векторског производа

Као и код скаларног производа, дефиниција оставља отворено питање: како се, за дате конкретне векторе и њихове координате, рачуна векторски производ? Како бисмо одговорили на то питање, најпре означимо три вектора:

$$\vec{i} = (1, 0, 0), \quad \vec{j} = (0, 1, 0), \quad \vec{k} = (0, 0, 1).$$

Ова три вектора су, заправо, вектори дужине један у смеру координатних оса x, y и z. Ако су $\vec{a} = (x_a, y_a, z_a)$ и $\vec{b} = (x_b, y_b, z_b)$, онда се $\vec{a} \times \vec{b}$ може рачунати као **формална детерминанта**[11]

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} \right).$$

Из свега претходно реченог, није тешко уочити да векторски производ, између осталог, служи томе да карактерише *колинеарност*, односно то да ли два вектора имају исти правац. Прецизније, *два не-нула вектора у $\mathbb{R}^3$ су колинеарна ако и само ако је њихов векторски производ једнак нули.*

Приметимо да је **векторски производ два вектора вектор**, па он јесте операција у смислу првих вежби.

[11] Ово није права детерминанта, јер су јој елементи мало вектори, мало бројеви. Не треба је схватити као детерминанту, већ као згодну мнемотехнику.

Од занимљивих особина, истичемо да је векторски производ *антикомутативан*, тј. $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$. Он је *дистрибутиван према сабирању вектора*, односно

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$$

и слаже се са скаларним множењем:

$$\alpha\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = (\alpha\cdot\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(\alpha\cdot\vec{b}).$$

Векторски производ *није асоцијативан*, али задовољава *Јакобијев*[12] *идентитет*:

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{0}.$$

Мешовити производ

Мешовити производ је можда и прва тернарна „операција"[13] са којом се сусрећемо у животу. То значи да не узима два аргумента, већ три; овде, повратна вредност је реалан број.

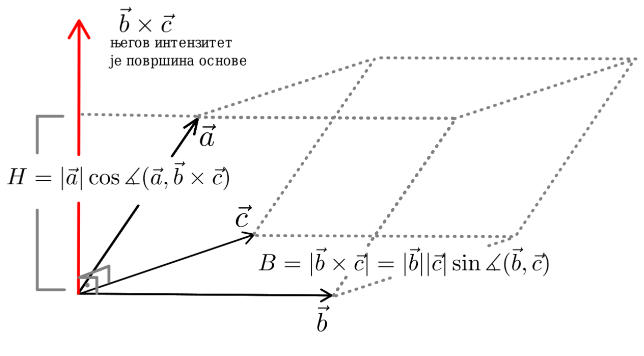
Прецизније, за векторе $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ из $\mathbb{R}^3$, њихов мешовити производ, у ознаци $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$, дефинише се као

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}). \tag{3}$$

Пошто је мешовити производ дефинисан преко (сада познатих) скаларног и векторског, и његов рачун у координатама може се извести преко њих. Али, овде се може добити и више, и може се доказати да, ако је $\vec{a} = (x_a, y_a, z_a)$, $\vec{b} = (x_b, y_b, z_b)$ и $\vec{c} = (x_c, y_c, z_c)$, онда је

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}.$$

Мешовити производ је заправо дефинисан да његова вредност, до на знак, представља **запремину паралелепипеда** којег формирају вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Слика 7 нас уверава да је то заиста тако.



Слика 7: Мешовити производ

Сада је јасно и чему мешовити производ служи, сходно томе да је једнак нули када нема паралелепипеда, тј. када му је запремина нула. Дакле, *три не-нула вектора су копланарна (у истој равни) ако и само ако је њихов мешовити производ једнак нули.*

Од интересантних својстава, истичемо да уколико два вектора замене места, мешовити производ мења само знак, док циклична (кружна) померања не мењају вредност мешовитог производа.

Задаци који се раде на вежбама

1. Нека је $\mathbb{R}^3 = \{(a_1,a_2,a_3)\mid a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}\}$ и нека је $+$ операција дефинисана једнакошћу

$$(a_1,a_2,a_3)+(b_1,b_2,b_3) = (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3).$$

Нека је $\cdot$ операција дефинисана са

$$\lambda\cdot(a_1,a_2,a_3) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3),$$

где је $\lambda\in\mathbb{R}$.

а) Доказати да је $(\mathbb{R}^3,+,\cdot,\mathbb{R})$ векторски простор.

б) Доказати да вектори $\vec{e}_1 = (2,1,-3)$, $\vec{e}_2 = (3,2,-5)$ и $\vec{e}_3 = (1,-1,1)$ чине базу у $\mathbb{R}^3$ и изразити вектор $\vec{x} = (6,2,-7)$ помоћу вектора те базе.

а) Овде се ради о класичном и добро познатом сабирању вектора и множењу вектора скаларом, и решење дела а) се води на тривијалну проверу својстава, коју овде нећемо спроводити.[14]

б) Да би вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ чинили базу, треба да су (по дефиницији базе) линеарно независни и да генеришу $\mathbb{R}^3$.

Линеарну независност показујемо по дефиницији: једначина (по α, β, γ)

$$\alpha\cdot\vec{e}_1+\beta\cdot\vec{e}_2+\gamma\cdot\vec{e}_3 = \vec{0}$$

треба да има јединствено решење $\alpha=\beta=\gamma=0$. Распишемо ли, имамо да је

$$\alpha(2,1,-3)+\beta(3,2,-5)+\gamma(1,-1,1) = (0,0,0),$$

односно

$$(2\alpha+3\beta+\gamma, \alpha+2\beta-\gamma, -3\alpha-5\beta+\gamma) = (0,0,0).$$

Добијамо систем једначина

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2\alpha & + & 3\beta & + & \gamma & = & 0 \\ \alpha & + & 2\beta & - & \gamma & = & 0 \\ -3\alpha & - & 5\beta & + & \gamma & = & 0 \end{array}$$

Не размишљајући превише, решили бисмо овај систем и констатовали бисмо да му је тројка $(0,0,0)$ једино решење. Тако бисмо потрошили доста времена. Али, можемо приметити да је овај систем хомоген, тј. слободни чланови су му нуле. То значи да је $(0,0,0)$ сигурно решење овог система. Даље, детерминанта система једнака је

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & -5 & 1 & -3 & -5 \end{array}\right| = 4+9-5-(-6+10+3) = 1 \neq 0,$$

[12] Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851), немачки математичар

[13] Знаци навода јер, опет, није операција у класичном смислу.

[14] Надамо се да је и читаоцима очигледно да је $(\mathbb{R}^3,+,\cdot,\mathbb{R})$ заиста векторски простор. Ако није, свакако их охрабрујемо да доказ спроведу за вежбу.

па систем има јединствено решење по Крамеру,[15] па оно мора бити $(0,0,0)$, јер је то већ решење. Дакле, вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ ***јесу линеарно независни.***

Да би чинили базу, треба још показати да генеришу $\mathbb{R}^3$, тј. да се **произвољан** вектор из $\mathbb{R}^3$ може записати као њихова линеарна комбинација. Означимо тај произвољан вектор са $\vec{v} = (a,b,c)$. Ваља показати да једначина

$$\vec{v} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3$$

има макар једно решење (α,β,γ). Распишемо:

$$(a,b,c) = \alpha(2,1,-3) + \beta(3,2,-5) + \gamma(1,-1,1),$$

односно

$$(2\alpha + 3\beta + \gamma, \alpha + 2\beta - \gamma, -3\alpha - 5\beta + \gamma) = (a,b,c),$$

односно:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2\alpha & + & 3\beta & + & \gamma & = & a \\ \alpha & + & 2\beta & - & \gamma & = & b \\ -3\alpha & - & 5\beta & + & \gamma & = & c \end{array}$$

Овај систем има исту детерминанту система као онај малопре и знамо да она није нула. Следи да важи оно што смо хтели, па смо доказали да $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ чине базу.

Остаје још да вектор $\vec{x} = (6,2,-7)$ запишемо у тој бази. Истим расписом добијамо

$$(6,2,-7) = \alpha(2,1,-3) + \beta(3,2,-5) + \gamma(1,-1,1),$$

односно систем

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2\alpha & + & 3\beta & + & \gamma & = & 6 \\ \alpha & + & 2\beta & - & \gamma & = & 2 \\ -3\alpha & - & 5\beta & + & \gamma & = & -7 \end{array}$$

У овом тренутку би студенти требало да знају барем два начина како да реше овај систем, па решавање нећемо спроводити, већ ћемо само записати да је оно једнако $(\alpha,\beta,\gamma) = (1,1,1)$. Решење задатка завршавамо тако што констатујемо да је

$$\vec{x} = 1\cdot\vec{e}_1 + 1\cdot\vec{e}_2 + 1\cdot\vec{e}_3.$$

2. Дати су вектори $\vec{e}_1 = (p,0,1)$, $\vec{e}_2 = (2,-1,3)$ и $\vec{e}_3 = (1,1,-2)$ у $(\mathbb{R}^3,+,\cdot,\mathbb{R})$.

а) Одредити за које вредности реалног параметра p су дати вектори линеарно независни.

б) За $p = 4$ испитати да ли дати вектори чине базу датог векторског простора. Уколико чине, одредити координате вектора $(1,2,-1)$ у тој бази.

Решићемо само део а); део б) смо већ решавали, само са другим бројевима, па се он може сматрати задатком за самосталан рад.

а) Да би вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ били линеарно независни, једначина

$$\alpha\cdot\vec{e}_1 + \beta\cdot\vec{e}_2 + \gamma\cdot\vec{e}_3 = \vec{0}$$

треба да има јединствено решење $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Као и у претходном задатку, то нас доводи до система једначина

$$\begin{array}{rcrcrcl} p\alpha & + & 2\beta & + & \gamma & = & 0 \\ & - & \beta & + & \gamma & = & 0 \\ \alpha & + & 3\beta & - & 2\gamma & = & 0, \end{array}$$

који, као хомоген систем, свакако има $(0,0,0)$ као решење. Да би оно било и једино решење, детерминанта система мора бити различита од нуле, а она износи:

$$\begin{vmatrix} p & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} p & 0 & 1 & p & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right|$$
$$= 2p + 0 + 2 - (-1 + 3p + 0) = -p + 3.$$

За $p \neq 3$ је ова детерминанта различита од нуле, и тада су посматрани вектори линеарно независни.

3. Дати су вектори $\vec{u} = (6,1,1)$, $\vec{v} = (0,3,-1)$ и $\vec{w} = (-2,3,5)$. Одредити $t \in \mathbb{R}$ тако да вектори $\vec{u} + t\vec{v}$ и $\vec{w}$ буду ортогонални.

Тражимо t за које је

$$(\vec{u} + t\vec{v})\cdot\vec{w} = 0,$$

односно

$$((6,1,1) + t(0,3,-1))\cdot(-2,3,5) = 0$$
$$(6, 1+3t, 1-t)\cdot(-2,3,5) = 0$$
$$-12 + 3 + 9t + 5 - 5t = 0$$
$$-4 + 4t = 0$$
$$t = 1$$

За $t = 1$ су вектори $\vec{u} + t\vec{v}$ и $\vec{w}$ ортогонални.

4. Израчунати меру угла који граде вектори $\vec{a} = (7,2,-1)$ и $\vec{b} = (1,2,-3)$.

Имамо да је

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\measuredangle(\vec{a},\vec{b}),$$

односно

$$\cos\measuredangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{(7,2,-1)\cdot(1,2,-3)}{\sqrt{7^2+2^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}}$$

[15] Још један начин за доказивање линеарне независности би био употребом рачуна са рангом матрице. Знамо да је ранг матрице једнак максималном броју њених линеарно независних врста/колона. Направимо матрицу од вектора $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ и рачунамо јој ранг.

$$\begin{array}{c} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \overset{V_3 \text{ на поч.}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 5 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Ранг је очигледно 3, па изводимо исти закључак.

$$= \frac{7+4+3}{\sqrt{54}\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{7}{27}}.$$

Дакле, $\measuredangle(\vec{a},\vec{b}) = \arccos\sqrt{\frac{7}{27}}$.

5. Наћи површину и дужину висине BD троугла ΔABC ако је $A(-3,-2,0)$, $B(3,-3,1)$ и $C(5,0,2)$.

За почетак, странице $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ троугла ΔABC изражавамо као векторе:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (6,-1,1), \qquad \overrightarrow{AC} = C - A = (8,2,2).$$

Површину паралелограма над њима можемо наћи као интензитет њиховог векторског производа, па ћемо онда прво наћи сам векторски производ:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -1 & 1 \\ 8 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}\vec{k}$$
$$= (-4,-4,20)$$

Нама не треба површина паралелограма, већ троугла; али, троугао је половина паралелограма (нацртати слику по узору на Слику 6), па добијамо:

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{16+16+400} = 6\sqrt{3}.$$

С друге стране, на основу добро познате формуле за површину троугла, имамо да је

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}| \cdot h,$$

односно

$$h = \frac{2P_{\Delta ABC}}{|\overrightarrow{AC}|}\frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{64+4+4}} = \frac{12\sqrt{3}}{6\sqrt{2}} = \sqrt{6}.$$

6. Израчунати запремину тетраедра и паралелепипеда над векторима $\vec{a} = (1,2,3)$, $\vec{b} = (2,2,0)$ и $\vec{c} = (0,2,2)$.

Знамо да је запремина паралелепипеда над трима векторима једнака апсолутној вредности њиховог мешовитог производа. Како **шест тетраедара** (тространих пирамида) **стаје у паралелепипед**, то ћемо запремину тетраедра наћи као једну шестину апсолутне вредности мешовитог производа три дата вектора:

$$V_{\text{тетраедра}} = \frac{1}{6}|[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]| = \frac{1}{6}\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right|$$
$$= \frac{1}{6}|4+0+12-8| = \frac{4}{3}.$$

7. Испитати да ли су вектори $\vec{a} = (1,2,3)$, $\vec{b} = (4,1,1)$ и $\vec{c} = (-9,3,6)$ копланарни, а ако јесу изразити вектор $\vec{c}$ преко остала два.

Како је мешовити производ критеријум копланарности, рачунамо:

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ -9 & 3 & 6 & -9 & 3 \end{array}\right|$$
$$= 6 - 18 + 36 + 27 - 3 - 48 = 0,$$

па вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ јесу копланарни, и можемо изразити $\vec{c}$ као $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Распишемо ли ову једнакост, имамо да је

$$(-9,3,6) = \alpha(1,2,3) + \beta(4,1,1),$$

што нам даје систем од три једначине и две непознате:

$$\begin{array}{ccccc} \alpha & + & 4\beta & = & -9 \\ 2\alpha & + & \beta & = & 3 \\ 3\alpha & + & \beta & = & 6. \end{array}$$

Ако прве две једначине посматрамо као засебан систем 2×2, његово решење је $\alpha = 3$ и $\beta = -3$. Неопходно је проверити и да ли је трећа једначина задовољена, што се директним увршатавањем испоставља као тачно. Дакле,

$$\vec{c} = 3 \cdot \vec{a} - 3 \cdot \vec{b}.$$

Додатни решени задаци

8. Дате су тачке $A(1,-1,1)$, $B(1,3,1)$, $C(3,1,1)$ и $D(1,1,3)$.

а) Израчунати запремину тростране пирамиде са теменима A, B, C и D.

б) Израчунати дужину висине те пирамиде која полази из темена D.

а) Вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ чине три ивице тетраедра, па можемо наћи његову запремину као шестину апсолутне вредности њиховог мешовитог производа. Имамо да је

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0,4,0),$$
$$\overrightarrow{AC} = C - A = (2,2,0),$$
$$\overrightarrow{AD} = D - A = (0,2,2),$$

па је

$$[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}] = \left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & 4 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right| = -16$$

па је запремина паралелепипеда над овим векторима једнака 16, односно запремина тетраедра је $V_{\text{тетраедра}} = 16/6 = 8/3$.

б) Запремина тетраедра коју смо срачунали може се изразити и преко познате формуле $V = BH/3$, где је B површина (троугаоне) основе коју граде вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, а H је висина на ту базу из темена D. Користићемо векторски производ да израчунамо површину основе. Имамо да је

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \right)$$
$$= (0, 0, -8),$$

па је

$$B = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{64} = 4.$$

Како је $V_{\text{тетраедра}} = BH/3$, односно

$$\frac{8}{3} = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot H,$$

добијамо да је $H = 2$.

Задаци за самосталан рад

9. Дати су вектори $\vec{a} = (4, 1, -4)$, $\vec{b} = (3, 4, \lambda - 5)$, $\vec{c} = (2\lambda - 7, -4, 3)$ и $\vec{d} = (5, 3, 7)$.

а) Одредити за које вредности реалног параметра λ су вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ линеарно зависни.

б) Доказати да за $\lambda = 5$ вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ чине базу векторског простора $\mathbb{R}^3$ и изразити вектор $\vec{d}$ као њихову линеарну комбинацију.

10. Нека су дате тачке $A(1, -2, 2)$, $B(-1, 1, -2)$, $C(0, -1, 1)$ и $D(p + 2, 0, p + 1)$ у простору $\mathbb{R}^3$.

а) Да ли су вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ линеарно независни за $p = 1$?

б) Ако јесу, израчунати дужину висине из темена D на страну ABC у пирамиди $ABCD$. Ако нису, изразити вектор $\overrightarrow{AD}$ као линеарну комбинацију вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. *(У свим израчунавањима користити $p = 1$.)*

11. У простору $\mathbb{R}^3$ дата су четири вектора:

$$\vec{a} = (1, 1, 2), \quad \vec{b} = (4, -3, 1),$$

$$\vec{c} = (8, -5, 6), \quad \vec{d} = (8, -13, -5).$$

(а) Испитати да ли вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ чине базу векторског простора $(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \mathbb{R})$.

(б) Уколико чине, изразити вектор $\vec{d}$ као њихову линеарну комбинацију. У супротном, изразити вектор $\vec{a}$ као линеарну комбинацију вектора $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Користан ресурс за учење

`https://www.youtube.com/playlist?list=PLZHQObOWTQDPD3MizzM2xVFitgF8hE_ab`