Теоријске основе

Систем од m линеарних једначина са n непознатих $x_1, x_2, ..., x_n$ је следећи скуп једначина:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ + \cdots + a_{1n}x_n \ &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Систем једначина је **хомоген** ако је $b_1 = ... = b_m = 0$. Хомоген систем увек има тривијално решење: $(0, ..., 0)$.

Систем можемо записати у матричном облику:

$$AX = B,$$

где је

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Матрица A се назива матрицом система. Проширена матрица система A_p јесте матрица која се добија од матрице A тако што се дода колона слободних чланова B.

$$A_p = [A \mid b] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

Први метод који се може користити за решавање система линеарних једначина јесте помоћу Кронекер-Капелијеве теореме која је заснована на рангу матрице. Ова теорема се може користити када је потребно одговорити на питање о природи система.

Теорема 1 [Кронекер-Капелијева теорема].

- *Ако је $r(A) = r(A_p) = n$, систем има јединствено решење.*
- *Ако је $r(A) = r(A_p) < n$, онда систем има бесконачно много решења.*
- *Ако је $r(A) < r(A_p)$, систем нема решења.*

Размотримо сада квадратни систем ($m = n$): $AX = B$. Детерминанта система јесте детерминанта матрице A - Δ.

Детерминанта непознате $x_i, 1 \leq i \leq n$ јесте детерминанта матрице A_i, која се добија од матрице A тако што $i-$ту колону заменимо колоном B - Δ_{x_i}.

Теорема 2 [Крамерово правило].

- *Ако је $\Delta \neq 0$, онда систем има јединствено решење које је дато као:*

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}.$$

- *Ако је $\Delta = 0$, али је **барем један од** Δ_{x_i} различит од нуле, систем нема решења.*
- *Ако је $\Delta = \Delta_{x_1} = \cdots = \Delta_{x_n} = 0$, систем или нема решења, или их има бесконачно много. У овом случају, потребно је решити систем на неки други начин (нпр. Гаусовом методом елиминације).*

Обратити пажњу на то да је Крамерово правило могуће применити само на квадратне системе.

Задаци који се раде на вежбама

1. Испитати сагласност и решити систем линеарних једначина:

$$\begin{aligned} x + y - z &= -4 \\ 2x + y \quad\ &= 0 \\ x - y + z &= 6 \end{aligned}$$

Систем се састоји од 3 непознате и 3 једначине, па се ради о квадратном систему. Зато, покушавамо прво да решимо систем Крамеровим правилом. Матрица система је:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

а њена детерминанта:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix} \Bigg| \\ = 2$$

Потом, рачунамо детерминанте непознатих:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -4,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 6.$$

Како је $\Delta \neq 0$, на основу Крамеровог правила систем има јединствено решење и оно је једнако:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{2}{2} = 1,$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-4}{2} = -2,$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{6}{2} = 3.$$

Решење система је уређена тројка

$$(x, y, z) = (1, -2, 3).$$

> **2.** Испитати сагласност и решити систем линеарних једначина:
>
> $$\begin{aligned} x - \ \ y + 3z &= 1 \\ x + 2y - \ \ z &= 1 \\ 3x + 3y + \ \ z &= 3 \end{aligned}$$

У овом задатку имамо квадратни систем, па поново покушавамо да га решимо Крамеровим правилом.

Матрица система је:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

а њена детерминанта је:

$$\begin{aligned} \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} &= \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right| \\ &= 2 + 3 + 9 - 18 + 3 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Детерминанте непознатих су:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Видимо да је добијено да је $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, па нам Крамерово правило овде не помаже. Зато се враћамо на почетак и систем решавамо Гаусовом методом елиминације.

$$\begin{aligned} x - \ \ y + 3z &= 1 \\ x + 2y - \ \ z &= 1 \\ 3x + 3y + \ \ z &= 3 \\ - - - - - - - - - & \\ x - \ \ y + 3z &= 1 \\ 3y - 4z &= 0 \quad II - I \\ 6y - 8z &= 0 \quad III - 3I \\ - - - - - - - - - & \\ x - \ \ y + 3z &= 1 \\ 3y - 4z &= 0 \\ 0z &= 0 \quad III - 2II \end{aligned}$$

Последња једначина у систему је увек тачна. за свако z, па нам она не даје никакве додатне информације и не морамо је даље писати.

Дакле, остаје нам систем:

$$\begin{aligned} x - \ \ y + 3z &= 1 \\ 3y - 4z &= 0. \end{aligned}$$

Добијени систем има 3 непознате, а 2 једначине, а како нисмо добили никакву контрадикцију, знамо да ће систем имати бесконачно много решења. Да бисмо описали та решења, из друге једначине ћемо једну промењљиву прогласити за параметар.

Нека је $z = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$. Остале непознате ($x$ і y) изражавамо преко α:

$$y = \frac{4}{3}\alpha,$$

$$x = 1 - \frac{5}{3}\alpha.$$

Коначно, скуп решења система је:

$$\left\{ \left(1 - \frac{5}{3}\alpha, \frac{4}{3}\alpha, \alpha\right) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

> **3.** Испитати сагласност и решити систем линеарних једначина, у зависности од реалног параметра a:
>
> $$\begin{aligned} 3x - 2y + 5z + au &= 0 \\ 6x - ay + 4z + 3u &= 0 \\ 9x - 6y + 3z + 2u &= 0 \end{aligned}$$

Како су слободни чланови нуле, систем је хомоген. Зато, одмах знамо да је $(x, y, z, u) = (0, 0, 0, 0)$ једно решење овог система. Како овај систем има 4 непознате, а 3 једначине, закључујемо да сигурно неће имати јединствено решење, односно $(0, 0, 0, 0)$ није јединствено решење.

Систем можемо решити Гаусовим системом елиминације:

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 5z + au &= 0 \\ 6x - ay + 4z + 3u &= 0 \\ 9x - 6y + 3z + 2u &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 5z + au &= 0 \\ (4 - a)y - 6z + (3 - 2a)u &= 0 \qquad \text{II} - 2\text{I} \\ -12z + (2 - 3a)u &= 0 \qquad \text{III} - 3\text{I} \end{aligned}$$

Из добијеног система, можемо приметити да од фактора $(4 - a)$ који стоји уз непознату y зависи да ли ће друга и трећа једначина имати или не исти број непознатих, па у зависности од тога разликујемо случајеве:

1. $a \neq 4$

   У овом случају, имамо 4 непознате а 3 једначине, те ћемо имати бесконачно много решења и проглашавамо једну од непознатих за реални параметар. Иако је свеједно коју непознату прогласимо за параметар, овде је свакако згодније узети да је $u = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$, зато што тада приликом изражавања z немамо дељење са нулом. Да смо узели да је $z = \alpha$, приликом изражавања непознате u, морали бисмо да водимо рачуна о $(2-3a)$ да ли је различито од нуле или не.

Свакако, за $u = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$, имамо да су остале непознате једнаке:

$$z = \frac{2-3a}{12}\alpha,$$

$$y = -\frac{1}{2}\alpha,$$

$$x = \frac{3a-22}{36}\alpha$$

.

У овом случају, скуп решења система је:

$$\left\{ \left(\frac{3a-22}{36}\alpha, -\frac{1}{2}\alpha, \frac{2-3a}{12}\alpha, \alpha \right) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. $a = 4$

   У овом случају, полазни систем постаје:

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 5z + 4u &= 0 \\ -6z - 5u &= 0 \\ -12z - 10u &= 0 \end{aligned}$$

   Како је трећа једначина једнака другој помноженој са 2 (пропорционалне су), систем постаје:

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 5z + 4u &= 0 \\ -6z - 5u &= 0 \end{aligned}$$

   Сада имамо 4 непознате, а 2 једначине, што поново значи да ћемо имати бесконачно много решења, али је сада неопходно да две променљиве прогласимо за реалне параметре. Нека су $u = \alpha, y = \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тада су:

$$z = -\frac{5}{6}\alpha,$$

$$x = \frac{1}{18}\alpha + \frac{2}{3}\beta.$$

   Скуп решења система у овом случају је:

$$\left\{ \left(\frac{1}{18}\alpha + \frac{2}{3}\beta, \beta, -\frac{5}{6}\alpha, \alpha \right) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

4. Испитати сагласност и решити систем линеарних једначина:

$$\begin{aligned} x + 2y + az &= 2 \\ 3x - y + 2z &= 0 \\ 4x + y + a^2 z &= a \end{aligned}$$

Како се ради о квадратном систему, покушавамо прво са применом Крамеровог правила.

Матрица система је:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & a^2 \end{bmatrix},$$

па је детерминанта система:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & a^2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{matrix}$$
$$= -a^2 + 16 + 3a - (-4a + 2 + 6a^2) = -7a^2 + 7a + 14$$
$$= -7(a^2 - a - 2) = -7(a-2)(a+1)$$

Детерминанте непознатих су:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 2 & a \\ 0 & -1 & 2 \\ a & 1 & a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & a \\ 0 & -1 & 2 \\ a & 1 & a^2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \\ a & 1 \end{matrix}$$
$$= -2a^2 + 4a + a^2 - 4 = -a^2 + 4a - 4$$
$$= -(a-2)^2$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & a & a^2 \end{vmatrix} = 16 + 3a^2 - 2a - 6a^2$$
$$= -3a^2 - 2a + 16$$
$$= -(a-2)(3a+8)$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & a \end{vmatrix} = -a + 6 + 8 - 6a$$
$$= -7a + 14$$
$$= -7(a-2)$$

Дискутујемо следеће случајеве:

1. $a \notin \{-1, 2\}$

   Тада имамо да је $\Delta \neq 0$, па на основу Крамеровог правила, систем има јединствено решење, које је једнако:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-(a-2)^2}{-7(a-2)(a+1)} = \frac{a-2}{7(a+1)},$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-(a-2)(3a+8)}{-7(a-2)(a+1)} = \frac{3a+8}{7(a+1)},$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-7(a-2)}{-7(a-2)(a+1)} = \frac{1}{a+1}.$$

2. $a = -1$

   У овом случају, имамо да је $\Delta = 0$, али $\Delta_x = -9$, па на основу Крамеровог правила, можемо закључити да систем нема решења.

3. $a = 2$

   Како свака од детерминанти садржи фактор $a - 2$, имамо да је $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, па нам Крамерово правило каже да систем или нема решења или их има бесконачно много. Зато, решавамо систем Гаусовом елиминацијом.

   Враћамо се на полазни систем, али мењамо $a = 2$ пошто се налазимо у оквиру тог случаја.

$$
\begin{aligned}
x + 2y + 2z &= 2\\
3x - \ \ y + 2z &= 0\\
4x + \ \ y + 4z &= 2\\
-------&--\\
x + 2y + 2z &= 2\\
-7y - 4z &= -6 \quad II - 3I\\
-7y - 4z &= -6 \quad III - 3I
\end{aligned}
$$

Како су добијене две исте једначине у систему, једна је вишак. Зато, наш систем је постао:

$$
\begin{aligned}
x + 2y + 2z &= 2\\
-7y - 4z &= -6
\end{aligned}
$$

Добили смо систем од 3 непознате и 2 једначине, па ћемо једну непознату узети као реални параметар: $z = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$. Тада су x и y једнаки:

$$y = \frac{6 - 4\alpha}{7} = \frac{6}{7} - \frac{4}{7}\alpha,$$

$$x = 2 - 2(\frac{6}{7} - \frac{4}{7}\alpha) - 2\alpha = \frac{2}{7} - \frac{6}{7}\alpha.$$

Дакле, скуп решења система је:

$$\left\{\left(\frac{2}{7} - \frac{6}{7}\alpha, \frac{6}{7} - \frac{4}{7}\alpha, \alpha\right) \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}.$$

5. У зависности од реалних параметара a и b, испитати сагласност и решити систем линеарних једначина

$$
\begin{aligned}
2x - y + 3z &= 2\\
x + 2y + z &= -1\\
4x + 3y + az &= 0\\
x - 3y + bz &= a - 2
\end{aligned}
$$

Примећујемо да у овом систему имамо 3 непознате, а 4 једначине. Решаваћемо овај систем Гаусовим системом елиминације.

Прво, посматраћемо другу једначину из система као да је прва, пошто је коефицијент уз x једнак 1, што нам је згодно за даље множење те једначине.

$$
\begin{aligned}
x + 2y + z &= -1\\
2x - y + 3z &= 2\\
4x + 3y + az &= 0\\
x - 3y + bz &= a - 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x + 2y + z &= -1\\
-5y + z &= 4 \qquad \text{II} - 2\text{I}\\
-5y + (a-4)z &= 4 \qquad \text{III} - 4\text{I}\\
-5y + (b-1)z &= a - 1 \qquad \text{IV} - \text{I}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x + 2y + z &= -1\\
-5y + z &= 4\\
(a-5)z &= 0 \qquad \text{III} - \text{II}\\
(b-2)z &= a - 5 \qquad \text{IV} - \text{II}
\end{aligned}
$$

Размотримо случајеве:

1. $a \neq 5$

   У овом случају, видимо да је трећа једначина у контрадикцији са четвртом, зато што из треће једначине тада следи да мора бити $z = 0$, а када се убаци у четврту једначину добијамо ту контрадикцију. Зато, систем нема решење.

2. $a = 5, b \neq 2$

   У овом случају, систем је:

$$
\begin{aligned}
x + 2y + z &= -1\\
-5y + z &= 4\\
z &= 0
\end{aligned}
$$

   па је решење система тада $(x, y, z) = (\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 0)$.

3. $a = 5, b = 2$

   Систем је сада:

$$
\begin{aligned}
x + 2y + z &= -1\\
-5y + z &= 4
\end{aligned}
$$

   Како се ради о систему са 3 непознате, а 2 једначине, систем ће имати бесконачно много решења и уводи се један параметар, на пример $z = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$.

   Добија се да је скуп решења:

$$\left\{\left(\frac{3}{5} - \frac{7}{5}\alpha, -\frac{4}{5} + \frac{1}{5}\alpha, \alpha\right) \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}.$$

Додатни решени задаци

6. У зависности од реалног параметра a испитати сагласност и решити систем линеарних једначина:

$$
\begin{aligned}
(3-a)x + y + az &= a\\
(a-2)x + y + z &= 0\\
3x + 3y + (a+2)z &= a + 1
\end{aligned}
$$

Ради се о квадратном систему, тако да ћемо покушати да га решимо Крамеровим правилом.

Рачунамо прво детерминанту система и детерминанте непознатих:

$$
\begin{aligned}
\Delta = \begin{vmatrix} 3- & 1 & a \\ a-2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & a+2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 3-a & 1 & a \\ a-2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & a+2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3-a & 1 \\ a-2 & 1 \\ 3 & 3 \end{matrix}\Bigg|\\
&= (3-a)(a+2) + 3 + 3a(a-2) - 3a - 3(3-a)\\
-(a^2-4) &= a^2 - 5a + 4\\
&= (a-4)(a-1).
\end{aligned}
$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ a+1 & 3 & a+2 \end{vmatrix} = -(a-1)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3-a & a & a \\ a-2 & 0 & 1 \\ 3 & a+1 & a+2 \end{vmatrix} = 3(a-1)$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3-a & 1 & a \\ a-2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & a+1 \end{vmatrix} = (a-1)(a-5)$$

Разликујемо следеће случајеве:

1. $a \notin \{4, 1\}$

   Сада је $\Delta \neq 0$, па на основу Крамеровог правила постоји јединствено решење:

   $$(x, y, z) = (\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta}) = (-\frac{1}{a-4}, \frac{3}{a-4}, \frac{a-5}{a-4}).$$

2. $a = 4$

   Сада је $\Delta = 0$, али је на пример $\Delta_x = -3 \neq 0$, па систем нема решења.

3. $a = 1$

   У овом случају имамо да је $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, па решавамо систем Гаусовим системом елиминације. У почетни систем, заменимо да је $a = 1$:

$$\begin{aligned}
2x + \ \ y + \ \ z &= 1 \\
-x + \ \ y + \ \ z &= 0 \\
3x + 3y + 3z &= 2 \\
- - - - - - - - - & \\
2x + y + z &= 1 \\
-3x \qquad\quad &= -1 \quad II - I \\
-3x \qquad\quad &= -1 \quad III - 3I \\
- - - - - - - - - & \\
2x + y + \ \ z &= 1 \\
-3x \qquad\quad &= -1 \\
0z &= 0 \quad III - II
\end{aligned}$$

   Како смо добили систем са 3 непознате и 2 једначине, систем ће имати бесконачно много решења и потребно је да уведемо један параметар.

   Коначно, скуп решења је једнак:

$$\left\{ \left(\frac{1}{3}, \alpha, \frac{1}{3} - \alpha \right) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Задаци за самосталан рад

7. У зависности од реалног параметра a испитати сагласност и решити систем линеарних једначина:

$$\begin{aligned}
2x + (2-a)y + (a-2)z &= 3 - a \\
-x + 3y + 2z &= -1 \\
3x + 5y + (a-1)z &= 3
\end{aligned}$$

8. У зависност од реалних параметара a и b испитати сагласност и решити систем линеарних једначина:

$$\begin{aligned}
5x + (4-a)y + 2bz + u &= 0 \\
3x + 2y + 3z + u &= 0 \\
3x + 2y + (b-1)z + u &= 0
\end{aligned}$$

9. У зависност од реалних параметара a и b испитати сагласност и решити систем линеарних једначина:

$$\begin{aligned}
x - 2y + z - 2u &= 2 \\
x + 2y + 3z + (b-2)u &= 3 \\
-x - 2y + (2a-5)z + (a-b+1)u &= b - a - 3
\end{aligned}$$