

Теоријске основе

Матрична једначина је једначина у којој је непозната матрица. Најпре се трансформише матрична једначина, тако да са леве стране остане само непозната матрица X . Приликом вршења тих трансформација, треба имати у виду да множење матрица није комутативно.

Појам ранга матрице

Ранг матрице је један од фундаменталних појмова у линеарној алгебри који мери максималан број линеарно независних врста или колона. Он нам помаже да одредимо да ли систем линеарних једначина има решења, као и то колика је „корисност“ информација које носе врсте или колоне.

С обзиром на то да ће се појам линеарне независности увести касније, сада ћемо описати како се у пракси одређује ранг матрице.

Елементарне трансформације матрице су:

1. замена места 2 врсте или колоне ($V_i \leftrightarrow V_j$)
2. множење врсте или колоне скаларом $\alpha \neq 0$ ($V_i \leftrightarrow \alpha V_i$)
3. множење врсте или колоне скаларом и додавање другој врсти или колони ($V_i \leftrightarrow V_i + \alpha V_j$)

Елементарне трансформације не мењају ранг матрице. Ознака да матрице A и B имају исти ранг биће: $A \sim B$. Циљ примене елементарних трансформација је довођење матрице на облик из ког се једноставно чита њен ранг.

Примери матрица ранга r :

$$\begin{bmatrix} \overbrace{1 \ 0 \ \dots \ 0}^r & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Ова матрица је у такозваном нормалном облику, где је број јединица једнак рангу матрице.

У задацима није неопходно свести матрицу на овај облик, већ је довољно стићи и до „степенастог“ облика матрице.

•

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1r} & u_{1r+1} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2r} & u_{2r+1} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{rr} & u_{rr+1} & \dots & u_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad u_{ii} \neq 0.$$

•

$$\begin{bmatrix} u_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ u_{21} & u_{22} & \ddots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{r1} & u_{r2} & \dots & u_{rr} & 0 & \dots & 0 \\ u_{r+1,1} & u_{r+1,2} & \dots & u_{r+1,r} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m1} & u_{m2} & \dots & u_{mr} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad u_{ii} \neq 0.$$

Треба имати у виду да ранг матрице не може бити већи од њене мање димензије, односно важи $r(A_{m \times n}) \leq \min\{m, n\}$.

Задаци који се раде на вежбама

1. Ако су $A, B, X, B-E$ инвертибилне матрице, решити једначину $AX^{-1}B - B = AX^{-1}$.

Имајући у виду да множење матрица није комутативно, трансформишемо једначину:

$$\begin{aligned} AX^{-1}B - AX^{-1} &= B \\ AX^{-1}(B - E) &= B \quad /A^{-1} \cdot _ \\ X^{-1}(B - E) &= A^{-1}B \quad /^{-1} \\ (B - E)^{-1}X &= B^{-1}A \quad / (B - E) \cdot _ \\ X &= (B - E)B^{-1}A. \end{aligned}$$

2. Решити матричну једначину $(M^{-1}X)^{-1} + 2M = B$, ако је

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 6 & -1 \end{bmatrix}.$$

Прво, трансформишемо полазну једначину:

$$\begin{aligned} (M^{-1}X)^{-1} &= B - 2M \quad /^{-1} \\ M^{-1}X &= (B - 2M)^{-1} \quad /M \cdot _ \\ X &= M(B - 2M)^{-1} \end{aligned}$$

Прво рачунамо $(B - 2M)^{-1}$ (уколико постоји):

$$\begin{aligned}
A := B - 2M &= \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 6 & -1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 6 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 2 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & -2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Даље, рачунамо детерминанту матрице $B - 2M$, користећи Сарусово правило, с обзиром на то да се ради о матрици реда три:

$$\begin{aligned}
\det(B - 2M) &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & | & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 3 + 1 + 0 - (6 + 0 + 0) = -2
\end{aligned}$$

Како је вредност детерминанте различита од нуле, закључујемо да $(B - 2M)^{-1}$ постоји, па настављамо са рачунањем њене адјунговане матрице:

$$\begin{aligned}
A_{11} &= + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 & A_{12} &= - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 & A_{13} &= + \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \\
A_{21} &= - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 & A_{22} &= + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 & A_{23} &= - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \\
A_{31} &= + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -5 & A_{32} &= - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 & A_{33} &= + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3
\end{aligned}$$

Матрица кофактора је:

$$\text{Cof}(B - 2M) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

а адјунгована матрица је:

$$\text{Adj}(B - 2M) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Одатле је :

$$\begin{aligned}
(B - 2M)^{-1} &= \frac{1}{\det(B - 2M)} \text{Adj}(B - 2M) \\
&= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Коначно је:

$$\begin{aligned}
X &= M(B - 2M)^{-1} \\
&= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \end{bmatrix} \\
&= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 & 0 & -8 \\ -2 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

3. Ако је

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}, c \neq 0, |a| \neq |b| \right\}$$

и $*$ операција множења матрица, испитати да ли је $(\mathcal{A}, *)$ Абелова група.

1. *Затвореност*. Нека су $A = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix}$ и $B =$

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \gamma & 0 \\ \beta & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

матрице из \mathcal{A} . Тада имамо да важи

$a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}, c \neq 0, \gamma \neq 0, |a| \neq |b|, |\alpha| \neq |\beta|$.

Имамо да важи:

$$\begin{aligned}
A * B &= AB = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \gamma & 0 \\ \beta & 0 & \alpha \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a\alpha + b\beta & 0 & a\beta + b\alpha \\ 0 & c\gamma & 0 \\ b\alpha + a\beta & 0 & b\beta + a\alpha \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Како је $c \neq 0$ и $\gamma \neq 0$, онда је и $c\gamma \neq 0$. Остаје још да се провери да ли је $|a\alpha + b\beta| \neq |a\beta + b\alpha|$.

Претпоставимо супротно: нека је $|a\alpha + b\beta| = |a\beta + b\alpha|$. Квадрирањем претходног израза и сређивањем долази се до једначине $(\alpha^2 - \beta^2)(a^2 - b^2) = 0$, одакле следи $\alpha^2 = \beta^2$ или $a^2 = b^2$. Због услова $|a| \neq |b|$ и $|\alpha| \neq |\beta|$, претходно је контрадикција са претпоставком $|a\alpha + b\beta| = |a\beta + b\alpha|$.

Овим смо показали да $A * B \in \mathcal{A}$, односно затвореност важи.

2. *Асоцијативност* Важи, јер је операција $*$ множење матрица, која је асоцијативна.

5. *Комутативност*

Нека су $A = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \gamma & 0 \\ \beta & 0 & \alpha \end{bmatrix}$ матрице из \mathcal{A} . Имамо да је

$$\begin{aligned}
A * B &= AB = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \gamma & 0 \\ \beta & 0 & \alpha \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a\alpha + b\beta & 0 & a\beta + b\alpha \\ 0 & c\gamma & 0 \\ b\alpha + a\beta & 0 & b\beta + a\alpha \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \alpha a + \beta b & 0 & \alpha b + \beta a \\ 0 & \gamma c & 0 \\ \beta a + \alpha b & 0 & \beta b + \alpha a \end{bmatrix} = B * A,
\end{aligned}$$

па комутативност важи.

3. *Постојање нултра*. Обично у матричним структурама има смисла проверити да ли је јединична матрица нултра.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Треба још проверити да ли јединична матрица припада скупу \mathcal{A} . $1, 0 \in \mathbb{Q}, 1 \neq 0, |1| \neq |0|$. Следи, да $E \in \mathcal{A}$. С обзиром на то да за јединичну матрицу E важи својство неутрала, закључује се да E заиста јесте неутрал у структури \mathcal{A} . Дакле, неутрал постоји.

4. *Посвојање инверза.* Нека је

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix}$$

произвољна матрица из \mathcal{A} . Лапласовим развојем по другој врсти имамо да је $\det A = c(a^2 - b^2)$. Како је $A \in \mathcal{A}$, знамо да је $c \neq 0$ и $|a| \neq |b|$, односно $a^2 \neq b^2$. Зато, $\det A \neq 0$, а то нам говори(на основу теореме), да матрица A има инверз. Како је A произвољна матрица из \mathcal{A} , то значи да сваки елемент у \mathcal{A} има инверз.

Остаје још да се провери да ли је тај инверз у \mathcal{A} . Зато нам је потребно и да израчунамо тај инверз. Директним рачуном, добија се да је

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a}{a^2-b^2} & 0 & \frac{-b}{a^2-b^2} \\ 0 & \frac{1}{c} & 0 \\ \frac{-b}{a^2-b^2} & 0 & \frac{a}{a^2-b^2} \end{bmatrix}$$

. Како је $\frac{1}{c} \neq 0$ и $|\frac{a}{a^2-b^2}| \neq |\frac{-b}{a^2-b^2}|$, $A^{-1} \in \mathcal{A}$. Дакле, сваки елемент скупа \mathcal{A} има инверзни елемент у скупу \mathcal{A} .

$(\mathcal{A}, *)$ јесте Абелова група.

4. Одредити ранг матрице

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Вршимо елементарне трансформације над матрицом A .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{V_1 \leftrightarrow V_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} V_2 \leftarrow V_2 - 2V_1 \\ V_4 \leftarrow V_4 - 4V_1 \end{matrix} \xrightarrow{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & -3 \end{bmatrix}$$

$$V_2 \leftrightarrow V_3 \xrightarrow{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & -3 \end{bmatrix}$$

$$V_4 \leftarrow V_4 - V_2 \xrightarrow{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \end{bmatrix}$$

$$V_4 \leftarrow V_4 - V_3 \xrightarrow{\sim} \begin{bmatrix} \boxed{1} & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 9 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Све матрице у овом низу имају исти ранг, а последња добијена матрица је у степенастом облику, па из ње можемо директно прочитати ранг.

$$r(A) = 3.$$

5. У зависности од реалног параметра a , одредити ранг матрице

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -a \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -a & -1 \end{bmatrix}$$

Вршимо елементарне трансформације над матрицом A .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -a \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -a & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{V_1 \leftrightarrow V_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -a \\ 3 & -a & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} V_2 \leftarrow V_2 - 2V_1 \\ V_3 \leftarrow V_3 - 3V_1 \end{matrix} \xrightarrow{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 2-a \\ 0 & -9-a & 2 \end{bmatrix}$$

$$V_3 \leftarrow V_3 + \frac{-9-a}{-5} V_2 \xrightarrow{\sim} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & -1 \\ 0 & \boxed{-5} & 2-a \\ 0 & 0 & \frac{(a-1)(a+8)}{5} \end{bmatrix}$$

За последњу добијену матрицу у низу видимо да ранг зависи од тога да ли је $(a-1)(a+8)$ нула или не.

$$r(A) = \begin{cases} 3, & a \notin \{-8, 1\}, \\ 2, & a \in \{-8, 1\}. \end{cases}$$

6. Одредити ранг матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 2 & 1 \\ 1 & 2a-1 & 3 & 1 \\ 1 & 3a-2 & b+1 & b-2 \end{bmatrix}$$

у зависности од реалних параметара a и b .

Вршимо елементарне трансформације:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 2 & 1 \\ 1 & 2a-1 & 3 & 1 \\ 1 & 3a-2 & b+1 & b-2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} V_2 \leftarrow V_2 - V_1 \\ V_3 \leftarrow V_3 - V_1 \end{matrix} \xrightarrow{\sim} \begin{bmatrix} 1 & a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 0 \\ 0 & 2a-2 & b-1 & b-3 \end{bmatrix}$$

$$V_3 \leftarrow V_3 - 2V_2 \xrightarrow{\sim} \begin{bmatrix} 1 & a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b-3 & b-3 \end{bmatrix}$$

Видимо да добијена матрица делује да је у степенастом облику. Ипак, то неће бити случај за све вредности параметара a и b . Ово је тренутак када се треба запитати: Шта је то што може да „поквари“ степенаст облик?

Уочава се да када је $a - 1 = 0$, односно $a = 1$, матрица **није** у степенастом облику, тј она је:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b-3 & b-3 \end{bmatrix}$$

што значи да из ње **не можемо** прочитати вредност ранга. Зато, настављамо са елементарним трансформацијама да би је довели до степенастог облика.

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b-3 & b-3 \end{bmatrix}$$

$$V_3 \leftarrow V_3 - (b-3)V_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-3 \end{bmatrix}$$

$$K_2 \leftrightarrow K_3 \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-3 \end{bmatrix}$$

Дакле, у случају када је $a = 1$, $r(A) = \begin{cases} 2 & b = 3 \\ 3 & b \neq 3 \end{cases}$.

Прелазимо на случај $a \neq 1$. Матрица коју смо добили елементарним трансформацијама на почетку задатка је:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & a & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{a-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b-3 & b-3 \end{bmatrix}.$$

Јасно је одавде да за све вредности параметра b , матрица ће бити у степенастом облику из ког можемо рећи ранг. Дакле, у случају $a \neq 1$, $r(A) = \begin{cases} 2 & b = 3 \\ 3 & b \neq 3 \end{cases}$. На крају, можемо приметити да ранг матрице A не зависи од вредности параметра a , па оба случаја можемо објединити са:

$$r(A) = \begin{cases} 2 & b = 3 \\ 3 & b \neq 3 \end{cases}.$$

Додатни решени задаци

7. Нека су дате матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ и

$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, и нека је E јединична матрица реда три. Решити матричну једначину

$$A(A+B)BX = E.$$

Означимо са $C = A(A+B)B$. Тада је $C =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 18 \end{bmatrix}.$$

Сада се полазна једначина свела на решавање једначине

$CX = E$, где је $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 18 \end{bmatrix}$. С обзиром на то

да је $\det C = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 18 \end{vmatrix} = 16$, матрица C има инверз,

па је $X = C^{-1}$. Одговарајући кофактори матрице C су:

$$\begin{aligned} C_{11} &= + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 36 & C_{12} &= - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 18 \end{vmatrix} = 0 & C_{13} &= + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 8 \\ C_{21} &= - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 18 \end{vmatrix} = 0 & C_{22} &= + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 18 \end{vmatrix} = 8 & C_{23} &= - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ C_{31} &= + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 & C_{32} &= - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 & C_{33} &= + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Коначно, имамо да је: $X = C^{-1} = \frac{1}{\det C} \cdot \text{adj } C =$

$$\frac{1}{16} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{9}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

8. Одредити ранг матрице у зависности од реалног параметра a

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2a+1 & 3 & -2 & 3 \\ -1 & 2a-1 & 3a-2 & 1 & 3a^2-2 \\ 3 & 2a-1 & 2-a & -3 & -a^2+a+1 \end{bmatrix}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2a+1 & 3 & -2 & 3 \\ -1 & 2a-1 & 3a-2 & 1 & 3a^2-2 \\ 3 & 2a-1 & 2-a & -3 & -a^2+a+1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} V_2 \leftarrow V_2 - 2V_1 \\ V_3 \leftarrow V_3 + V_1 \\ V_4 \leftarrow V_4 - 3V_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3a-1 & 3a-1 & 0 & 3a^2-1 \\ 0 & -a-1 & -a-1 & 0 & -a^2+a-2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} V_3 \leftarrow V_3 + (-3a+1)V_2 \\ V_4 \leftarrow V_4 + (a+1)V_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3a^2-3a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a^2+2a-1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \boxed{1} & a & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3a(a-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(a-1)^2 \end{bmatrix}$$

Видимо да ће ранг матрице зависити од нула полинома $3a(a-1)$ и $(a-1)^2$.

Разликујемо случајеве:

1. $a = 1$: Тада имамо

$$A \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

па је $r(A) = 2$.

2. $a = 0$:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$V_3 \leftrightarrow V_4 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_3 \leftrightarrow K_5 \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

У овом случају је $r(A) = 3$

3. $a \neq 0, 1$:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3a(a-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(a-1)^2 \end{bmatrix}$$

$$V_3 \leftarrow V_3 \div 3a(a-1) \neq 0 \\ V_4 \leftarrow V_4 \div \sim -(a-1)^2 \neq 0 \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V_4 \leftarrow V_4 - V_3 \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_4 \leftrightarrow K_5 \begin{bmatrix} \boxed{1} & a & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Одавде можемо закључити да је $r(A) = 3$

$$\text{Коначно, ранг је } r(A) = \begin{cases} 2 & a = 1 \\ 3 & a = 0 \\ 3 & a \neq 0, 1 \end{cases}.$$

Задаци за самосталан рад

9. Дате су матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 10 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$, $B =$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ и $C = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Решити матричну једначину

$$AX - 2A = B^T CX.$$

10. У зависности од реалног параметра a , одредити ранг матрице:

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ -a & a & -a^2 \\ a^3 & -a & 1 \end{bmatrix}$$