

У наставку је краћак преглед знања које је неопходно за решавање задатака који следе. Он никако није замена за предавања.

Појам матрице

Ако су m и n природни бројеви, онда је матрица A реда $m \times n$ са елементима $a_{ij} \in \mathbb{R}$ дефинисана као

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Формално, матрица A је једно пресликавање $A : \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}$, али ћемо је ми доживљавати као правоугаону табелу бројева.¹

Вектор (или, по потреби, матрица)

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$$

назива се i -та *врста* матрице A , а ми ћемо је (интерно) означити као $A_{i \rightarrow}$. Слично се дефинише и вектор (или, по потреби, матрица)

$$A_{\downarrow j} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

и назива се j -та *колона* матрице A . По потреби ћемо ова два објекта доживљавати као матрице реда $1 \times n$, односно $m \times 1$, а по потреби као векторе из \mathbb{R}^n , односно \mathbb{R}^m .

Од специјалних случајева, поменућемо *квадратну матрицу*, која има исти број врста и колона:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

као и *горње троугаону матрицу*, која је облика

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Аналогно се дефинише и *доње троугаона матрица*. Матрица која је истовремено и горње и доње троугаона јесте матрица облика

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

а зове се *дијагонална матрица*. Бројеви a_{11}, \dots, a_{nn} чине њену (главну) *дијагоналу*.

Сабирање, множење скаларом и транспоновање

Ако су $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ и $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ матрице и α реалан број, онда се дефинише збир матрица A и B као

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n},$$

односно сваки елемент матрице A се сабере са себи одговарајућим (у истој врсти и колони) елементом матрице B . Слично се дефинише и производ скалара α и матрице A као $\alpha A = [\alpha a_{ij}]_{m \times n}$, односно свако поље матрице A множи се скаларом α .

Транспонованье је операција која матрицу реда $m \times n$ претвара у матрицу реда $n \times m$, по следећем правилу:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n},$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{n \times m}.$$

Дакле, врсте матрице A постају колоне матрице² A^T . Два основна својства која има операција транспоновања јесу да важи $(A+B)^T = A^T + B^T$ и $(AB)^T = B^T A^T$ за све матрице A и B одговарајућег реда (тако да изрази имају смисла).

Детерминанта матрице

Свакој квадратној³ матрици A може се придружити реалан број $\det(A)$ који се назива *детерминанта* матрице A . Формалну дефиницију детерминанте дату

¹Постоје и матрице чији елементи нису нужно реални бројеви, већ, нпр, комплексни бројеви, или елементи неког *поља*, *врстена* итд. Читалац се охрабрује да научи шта је поље и шта је прстен.

²Изговара се „А транспоновоано“.

³И само таквој!

⁴Да будемо прецизни, ако се узме дефиниција детерминанте из уџбеника, помоћу пермутација, Лапласов развој постаје теорема. Екви-валентно, Лапласов развој може се узети као дефиниција детерминанте, па се онда у форми теореме извести да је он једнак изразу који укључује пермутације.

⁵Pierre-Simon, Marquis de Laplace (1749–1827), француски математичар и астроном

преко пермутација скупа \mathbb{S}_n можемо пронаћи у уџбе-нику, а овде ћемо је прескочити, већ ћемо дати начин како се она рачуна⁴ користећи тзв. Лапласов⁵ развој.

Циљ нам је да одредимо детерминанту квадратне матрице $A = [a_{ij}]_{n \times n}$. Прво, научимо како се рачуна детерминанта⁶ матрице реда 2×2 :

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Вратимо се сада на квадратну матрицу $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ произвољног реда n . Дефинишемо *минор* елемента a_{ij} матрице A као детерминанту која се добије од $\det(A)$ тако што се из ње избаци i -та врста и j -та колона, па се срачуна детерминанта „оног што преостане”. Означимо (интерно) тај минор са M_{ij} . *Кофактор*⁷ елемента a_{ij} дефинише се као

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Није неопходно, али је добра пракса зарад лакшег праћења, да се кофактори означавају истим словом као и матрица чији су кофактори.

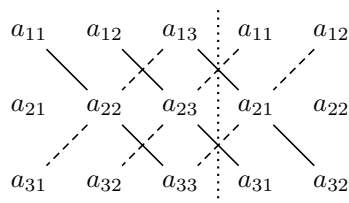
Сада смо спремни да дефинишемо⁸ детерминанту матрице A помоћу *Лапласовог развоја по i -тој врсти*:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in}.$$

Детерминанта се може развити и по колони, уместо по врсти. Постоји теорема која гарантује да се добија иста вредност.

Приметимо да, ако је матрица A реда n , онда су њени кофактори A_{ij} детерминанте реда $n - 1$. Лапласов развој нам омогућава да на овај начин сводимо детерминанту на неколико детерминанти мањег реда, па тако рекурзивно док не дођемо до детерминанте реда 2, коју знамо да рачунамо.

За детерминанту реда три⁹ постоји „трик” за брже рачунање, познат као *Сарусово правило*¹⁰. У наставку је дата илустрација и сама вредност детерминанте:



$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Ако бисмо описивали речима, рекли бисмо да је правилно следеће. Прво се на детерминанту допишу прве две колоне. Затим се вредност детерминанте добија тако што се саберу производи свих главних („ка доле”) дијагонала, а затим се одузму производи споредних („ка горе”) дијагонала.

⁶Угласе заграде предвиђене су нам за запис матрице, а усправне линије за запис детерминанте. **Ово двоје не треба мешати.** Матрица је **пресликавање/табела** бројева, док је њена детерминанта **реалан број**. Записати детерминанту уместо матрице није ситна грешка.

⁷Краткоуазлазни на првом о.

⁸Односно, рачунамо, ако смо дефинисали помоћу пермутација.

⁹**И само за тај ред!**

¹⁰Pierre Frédéric Sarrus (1798–1861), француски математичар

¹¹Свакако, охрабрујемо читаоца да покуша сам себи да разјасни пре него што прочита негде, или чује на предавањима, јер ће тако сигурно лакше да упамти.

¹²Наводимо пример прве колоне детерминанте реда 3; важи за било коју врсту, колону, или било који ред (димензију) детерминанте.

Особине детерминанте

У наставку набрајамо неке основне особине детерминанте. Нећемо на овом месту посебно објашњавати зашто важе; то је посао за предавања.¹¹

1. За сваку матрицу A је $\det(A) = \det(A^T)$.
2. Ако је цела једна врста или колона матрице A сачињена од нула, онда је $\det(A) = 0$.
3. Множењем неке врсте (колоне) детерминанте и додавањем другој, детерминанта не мења вредност.
4. Ако међу врстама или колонама матрице A има једнаких или пропорционалних, онда је $\det(A) = 0$.
5. Заменом места двема врстама (колонама), детерминанта мења само знак.
6. Ако је A горње (или доње) троугаона матрица:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

онда је $\det(A) = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$.

7. Детерминанта је адитивна по било којој¹² врсти или колони, тј.

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \alpha_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + \alpha_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + \alpha_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \alpha_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \alpha_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8. Детерминанта је хомогена по било којој врсти или колони, тј.

$$\begin{vmatrix} \alpha a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \alpha a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \alpha a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

На овом месту још једном апелујемо на читаоца: **матрица и детерминанта нису исти објекат.** Детерминанта је број придружен матрици. Матрице и детерминанте се не сабирају на исти начин и не множе се на исти начин скаларом, јер нису иста ствар.

Множење матрица

До сада смо научили како да саберемо две матрице истог реда, као и како да помножимо матрицу реалним бројем. Сада ћемо научити како да помножимо две матрице. Нека су дате матрице

$$A = [a_{ij}]_{m \times k} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ik} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mk} \end{bmatrix}$$

и

$$B = [b_{ij}]_{k \times n} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kj} & \cdots & b_{kn} \end{bmatrix}.$$

Да би матрице A и B могле да се помноже, број колона матрице A и број врста матрице B морају бити једнаки. У том случају, њихов производ јесте матрица реда $m \times n$ дефинисана као

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} A_{1 \rightarrow} \cdot B_{1 \downarrow} & A_{1 \rightarrow} \cdot B_{2 \downarrow} & \cdots & A_{1 \rightarrow} \cdot B_{n \downarrow} \\ A_{2 \rightarrow} \cdot B_{1 \downarrow} & A_{2 \rightarrow} \cdot B_{2 \downarrow} & \cdots & A_{2 \rightarrow} \cdot B_{n \downarrow} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m \rightarrow} \cdot B_{1 \downarrow} & A_{m \rightarrow} \cdot B_{2 \downarrow} & \cdots & A_{m \rightarrow} \cdot B_{n \downarrow} \end{bmatrix},$$

где је

$$A_{i \rightarrow} \cdot B_{j \downarrow} = \sum_{t=1}^k a_{it} b_{tj}$$

скаларни производ i -те врсте матрице A и j -те колоне матрице B .

Особине множења матрица, инверзна матрица

Ако су матрице A и B уједно и квадратне матрице истог реда, важи једно веома неочекивано својство, у литератури познато као Бине-Кошијева теорема о мултипликативности детерминанте:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Дакле, детерминанта производа једнака је производу детерминанти. Уочимо да производи на левој и десној страни једнакости нису исти производ; не множе чак ни исте „ствари”.

Од додатних својстава, множење матрица је асоцијативна операција.

МНОЖЕЊЕ МАТРИЦА НИЈЕ КОМУТАТИВНА ОПЕРАЦИЈА!¹³

¹³Ово представља једну од чешћих грешака у задатку са матричним једначинама. Водите рачуна!

¹⁴Производ две квадратне матрице реда n (што је скраћено за $n \times n$) је опет квадратна матрица реда n .

¹⁵Ако се сетимо да реалан број има инверз у односу на операцију множења реалних бројева ако и само ако није једнак нули, онда се ово тврђење може лепше изрећи: **Квадратна матрица има инверз (у структури $(M_n(\mathbb{R}), \cdot)$) ако и само ако њена детерминанта има инверз (у (\mathbb{R}, \cdot)).**

¹⁶Уколико постоји, али то се лако провери рачунањем детерминанте.

¹⁷Правилије би било *адјугована*, али се ово прво одомаћило.

Скуп квадратних матрица реда n , означимо га са $M_n(\mathbb{R})$ заједно са множењем матрица може се посматрати као алгебарска структура $(M_n(\mathbb{R}), \cdot)$. За сада знамо да у њој важи затвореност¹⁴ и асоцијативност, али не важи комутативност. Није тешко проверити да је неутралан елемент за множење матрица тзв. *јединична матрица* реда n :

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

па ова структура има неутрал.

Уколико би за матрицу $A \in M_n(\mathbb{R})$ постојала матрица $A^{-1} \in M_n(\mathbb{R})$ за коју је

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n,$$

тада би матрица A^{-1} била инверз матрице A у односу на операцију множења матрица. Тако се и назива: *инверзна матрица матрице A* .

Само квадратне матрице могу имати инверзну, али нема свака квадратна матрица инверзну матрицу. Рецимо, прва која пада на памет је матрица сачињена од свих нула. Срећом, важи теорема која карактерише инвертибилност квадратне матрице: **Квадратна матрица је инвертибилна ако и само ако је њена детерминанта различита од нуле.**¹⁵

Није тешко показати да за квадратне матрице A и B истог реда важи да је $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ и $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Рачунање инверза матрице

Пошто смо већ знали шта је инверз неког елемента у односу на неку операцију, сама дефиниција инверзне матрице нам није пала тешко. Ипак, и даље не знамо како да, за конкретну матрицу, израчунамо њену инверзну¹⁶. Сада ћемо научити алгоритам за њено рачунање. Нека имамо квадратну матрицу

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

и претпоставимо да смо срачунали да је $\det(A) \neq 0$, па знамо да она има инверзну матрицу.

За матрицу A дефинише се њена *матрица кофактора* као матрица добијена од матрице A тако што је свако поље замењено својим кофактором:

$$\text{Cof}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Транспонат ове матрице познат је као *адјугована*¹⁷

матрица матрице A :

$$\text{Adj}(A) = \text{Cof}(A)^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T.$$

Коначно, инверзну матрицу матрице A рачунамо као:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{Adj}(A).$$

Задаци који се раде на вежбама

1. Доказати да је $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 6$.

Нека је D детерминанта из задатка. Користећи Лапласов развој по другој врсти¹⁸ добијамо да је

$$\begin{aligned} D &:= -0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &- 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 4 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}}_{D_1} + \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}}_{D_2}. \end{aligned}$$

Даље је

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & | & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & | & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & | & 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 2 \cdot 3 \\ &\quad - (2 \cdot 3 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2) \\ &= 12 + 4 - 6 - (-6 + 6 + 8) \\ &= 10 - 8 \\ &= 2 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} D_2 &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & | & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & | & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & | & 2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 6 - 6 + 8 - (4 + 12 - 6) \\ &= 8 - 10 \\ &= -2. \end{aligned}$$

Дакле,

$$D = 4D_1 + D_2 = 4 \cdot 2 - 2 = 8 - 2 = 6,$$

што је и требало доказати.

¹⁸Практично је одабрати ону врсту/колону која има што више нула, јер ће се онда морати рачунати мање 3×3 детерминанти.

¹⁹Сходно томе да већина другог термина вежби буде потрошена на увођење појмова, објашњавање њихових особина и на испис саме процедуре проналажења инверзне матрице, неколицина задатака који се ураде на вежбама су прилично шаблонски. Стога, овај пут нећемо решавати додатне задатке и давати неке за самосталан рад, јер би се то svelo на замену бројева.

2. Доказати: $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b)(d-c)$.

Користећи особине детерминанте, сводимо детерминанту на троугаону:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{vmatrix} \quad IV - III \\ &= \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{vmatrix} \quad III - II \\ &= \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{vmatrix} \quad II - I \\ &= a(b-a)(c-b)(d-c), \end{aligned}$$

што је и требало доказати.

3. Одредити инверзну матрицу матрице

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Поступамо по алгоритму и рачунамо кофакторе:

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7 & A_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 & A_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \\ A_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 & A_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 & A_{23} &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \\ A_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -12 & A_{32} &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 & A_{33} &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -6 \end{aligned}$$

Дакле

$$\text{Cof}(A) = \begin{bmatrix} -7 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 2 \\ -12 & 6 & -6 \end{bmatrix},$$

то јест

$$\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} -7 & 4 & -12 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 2 & -6 \end{bmatrix}.$$

Сада рачунамо детерминанту матрице A :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 12 + 0 + 4 - (12 - 2 + 0) = 6. \end{aligned}$$

Коначно,¹⁹

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{Adj}(A) = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -7 & 4 & -12 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 2 & -6 \end{bmatrix}.$$